

SÉRIE A, N° 2278

N° D'ORDRE :

3149

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MAURICE CAUSSE

1^{re} THÈSE. — LES ÉLÉMENTS DE LA RELATIVITÉ CINÉMATIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 4 Mai 1949 devant la Commission d'examen.

MM. LOUIS DE BROGLIE. *Président.*

A. CHATELET..... }
J. L. DESTOUCHES. } *Examineurs*

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

—
1949

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du candidat : **CAUSSE.**

Prénom : **Maurice.**

Date de la soutenance : 4 mai 1949.

Numéro d'ordre : Série A, 2278. N° 3149.

CAUSSE (Maurice). — Les éléments de la relativité cinématique. *Paris*, Masson, 1949. In-8°, 45 p., 6 fig.

Th. Sc. Math., Paris, 1949. Série A, 2278, N° 3149.

CAUSSE (Maurice). — Les éléments de la relativité cinématique. *Paris*, Masson, 1949. In-8°, 45 p., 6 fig.

Th. Sc. Math., Paris, 1949. Série A, 2278, N° 3149.

CAUSSE (Maurice). — Les éléments de la relativité cinématique. *Paris*, Masson, 1949. In-8°, 45 p., 6 fig.

Th. Sc. Math., Paris, 1949. Série A, 2278, N° 3149.

CAUSSE (Maurice). — Les éléments de la relativité cinématique. *Paris*, Masson, 1949. In-8°, 45 p., 6 fig.

Th. Sc. Math., Paris, 1949. Série A, 2278, N° 3149.

SÉRIE A, N° 2278

N° D'ORDRE :

3149

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MAURICE CAUSSE

1^{re} THÈSE. — LES ÉLÉMENTS DE LA RELATIVITÉ CINÉMATIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 4 Mai 1949 devant la Commission d'examen.

MM. LOUIS DE BROGLIE. *Président.*

A. CHATELET..... }
J. L. DESTOUCHES. } *Examineurs*

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

—
1949

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. A. CHATELET.

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM ..	† Botanique.	WYART.....	† Minéralogie.
G. JULIA	† Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	TEISSIER.....	† Zoologie.
A. DENJOY	† Théorie des fonctions, et Topologie.	MANGENOT.....	† Biologie végétale.
L. LUTAUD.....	† Géographie physique et Géologie dynamique.	P. AUGER.....	† Physique quantique et relativité.
E. DARMOIS	† Enseignement de Physique.	MONNIER	Physiologie générale.
Robert LÉVY.....	† Physiologie comparée.	PIVETEAU.....	† Géologie.
Henri VILLAT.....	† Mécanique des fluides et applications.	ROCARD.....	† Physique.
Ch. JACOB.....	† Géologie.	H. CARTAN.....	Calcul différentiel.
P. PASCAL.....	† Chimie générale.	SCHAEFFER.....	† Physiologie des fonctions.
M. FRÉCHET.....	† Calcul des probabilités et Physique mathématique.	LAFFITTE.....	Chimie (P. C. B.).
Mme RAMART-LUCAS.	† Chimie organique.	FAVART.....	Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique.
FOCH	† Mécanique physique et expérimentale.	COULOMB	† Physiologie du Globe.
PAUTHENIER.....	† Electrotechnique générale.	M ^{lle} COUSIN	† Biologie animale (P.C.B.).
DE BROGLIE.....	† Théories physiques.	A. CHRÉTIEN.....	Chimie (P.C.B.).
JOB.....	† Chimie générale.	P. DRACH	Zoologie.
PRENANT	† Anatomie et Histologie comparées.	KASTLER	Physique.
COMBES.....	† Physiologie végétale.	CHATELET.....	† Arithmétique et théorie des nombres.
GARNIER.....	† Géométrie supérieure.	EPHRUSSI.....	† Génétique.
PÈRES	† Mécanique rationnelle.	WURMSER	† Biologie physico-chimique.
HACKSPILL	† Chimie minérale.	BAUER.....	† Chimie-physique.
TOUSSAINT.....	† Technique aéronautique.	RIVIÈRE.....	Géologie (P. C. B.).
M. CURIE.....	† Physique (P. C. B.).	GAUTHERET.....	Biologie Végétale (P.C.B.).
G. RIBAUD	† Hautes températures.	LUCAS	Physique.
CHAZY	† Mécanique analytique et Mécanique céleste.	MAX MORAND.....	Physique.
GROZE	† Physique théorique et Physique céleste.	ARNULF.....	Optique appliquée.
DUPONT.....	† Théories chimiques.	A. THOMAS.....	Evolution des êtres organisés.
VALIRON	† Calcul différentiel et calcul intégral.	SOLFILLET.....	Physique.
BARRABÉ	† Géologie structurale et géologie appliquée.	FORTIER	Mécanique expérimentale des fluides.
VAVON.....	† Analyse et mesures chimiques.	DANJON.....	† Astronomie.
G. DARMOIS	† Mathématiques générales.	FROMAGEOT.....	Chimie Biologique.
Jacques BOURCART.	Géographie physique et Géologie dynamique.	LAPORTE.....	Physique générale et Radioactivité.
AUBEL	† Chimie biologique.	JANET.....	Mathématiques générales.
M ^{lle} JOLIO-CURIE.	† Physique générale et Radio-activité.	PEIT.....	† Biologie maritime.
PIANTEFOL.....	† Botanique.	QUENEY.....	† Météorologie et dynamique atmosphérique.
CAMANNES.....	† Recherches physiques.	GALLIEN.....	Biologie animale (P.C.B.).
GRASSÉ.....	† Evolution des êtres organisés.	EICHORN.....	Biologie végétale (P.C.B.).
PRÉVOST.....	† Chimie organique.	DE CUGNAC.....	Biologie végétale (P.C.B.).
BOULIGAND.....	† Application de l'analyse à la géométrie.	LAVAL.....	Physique (P.C.B.).
CHAUDRON.....	† Chimie appliquée.	Mlle CAUCHOIS.....	Chimie-Physique.
		THELLIER.....	Physique du Globe.
		AUDUBERT	Electrochimie.
		L'HÉRITIER.....	Génétique.
		GRIVET.....	† Radio electricité.
		PONCIN	Mécanique des fluides
		THURIF.....	† Mécanique appliquée.
		DERREI	Mathématiques générales.
		QUELET.....	Chimie (P.C.B.).
		JUNG.....	Géologie.

Secrétaire.....

CH. MONIER.



A MONSIEUR LE PROFESSEUR E. A. MILNE

LES ÉLÉMENTS DE LA RELATIVITÉ CINÉMATIQUE

Par M. CAUSSE

SOMMAIRE. — La théorie de E. A. Milne est fondée logiquement sur la relativité restreinte classique et sur le principe de Mach, d'après lequel le mouvement d'un corps quelconque est déterminé par des conditions cinématiques.

On démontre qu'un principe cosmologique simple peut être trouvé, dans l'invariance des accélérations d'un corps quelconque relativement à un sous-groupe de Lorentz. Le mouvement étant alors déterminé, on peut, moyennant des hypothèses générales, analyser complètement les notions de masse et de force, avec leurs conventions, et les interactions entre deux corps.

On démontre simplement qu'elles se partagent en deux groupes : la gravitation et l'électromagnétisme. Dans le dernier, les formules obtenues permettent d'interpréter simplement les phénomènes de spin, et le champ magnétique des corps tournants.

Enfin on démontre que les phénomènes obtenus épuisent, dans les mêmes conditions, l'ensemble des interactions possibles.

INTRODUCTION

La relativité cinématique dont M. E. A. Milne a jeté les bases dans son traité *Relativity, Gravitation and World Structure* (Oxford, 1935) est probablement aujourd'hui l'essai d'une synthèse cosmologique et physique, qui nous ramène le plus profondément à la conception d'une unité dans l'évolution de l'univers.

Le développement en est essentiellement logique — c'est-à-dire qu'un problème est toujours la traduction mathématique de conditions logiques, c'est-à-dire enfin un système d'équations fonctionnelles. Il ne faut en attendre aucun résultat numérique, mais seulement des formes, dont la déduction sera même orientée parfois par des principes classiques connus, posés comme faits d'expérience, ou nécessités logiques reconnues.

Cette remarque vaut dès le départ dans la combinaison même des principes.

1) *Principe de Mach*. — Le mouvement d'un corps est déterminé lorsqu'on connaît, avec les conditions initiales, la distribution de tous les autres mouvements dans l'univers. La seule réalité observable est le mouvement ; la force est une notion métaphysique, qui n'apparaît jamais que par l'analyse du mouvement, jusque dans son expression mathématique.

Le principe qui commande ces mouvements, s'il existe (pour édifier une théorie générale, on est bien obligé d'en supposer l'existence), est donc de nature cinématique, et doit être théoriquement susceptible de vérification directe.

2) Nous connaissons un tel principe cinématique, en relativité restreinte : le *Principe d'Einstein*, ou l'invariance de la vitesse de la lumière dans tous les systèmes en mouvement relatif de translation rectiligne et uniforme. Mais la relativité restreinte fait appel à la notion de *force* dès qu'on aborde le problème de la dynamique. Le principe d'Einstein est donc insuffisant.

3) De la combinaison des deux premiers principes, se déduit le *principe de Milne* qui se superpose au principe d'Einstein. Il existe des observateurs dans l'univers, tels que certaines caractéristiques du mouvement d'un corps quelconque (caractéristiques qu'on déterminera), sont identiques dans les différentes représentations de l'ensemble des observateurs d'un certain système. Ce sera le principe d'équivalence.

On démontre qu'un tel système n'est pas quelconque, mais qu'il en existe une infinité, tout observateur déterminant l'un d'eux, et l'ensemble des observateurs ainsi associés formant un sous-groupe de Lorentz.

On démontre qu'on peut alors prendre pour caractéristiques invariantes les accélérations, et que cette condition détermine le mouvement d'un corps quelconque. Il résulte du choix même des principes que la théorie contient la relativité restreinte, et n'en contrarie en aucun cas les résultats.

A la base, on trouve donc l'idée d'univers observable :

une méthode d'observation : celle des échanges de signaux ;

une théorie axiomatique des échanges de signaux qui, dans une certaine mesure, permet de construire une représentation abstraite de l'espace observable à partir de la seule notion de temps.

Ce dernier problème n'est d'ailleurs pas entièrement résolu ; la théorie comporte néanmoins, par les débuts de la théorie des échanges de signaux ⁽¹⁾, à laquelle nous avons joint un théorème sur

(¹) L'exposé le plus systématique de cette théorie se trouve dans l'ouvrage de M. J. L. DESTOUCHES, *Corpuscules et systèmes de corpuscules*, Paris, 1941.

les échanges entre trois observateurs, un commencement de construction de type semi-intuitionniste.

Milne a d'ailleurs vu lui-même le rapport de sa théorie avec les idées de Poincaré, qu'il cite ainsi : « Aucune expérience ne sera jamais en désaccord avec le postulat d'Euclide, pas plus qu'avec celui de Lobatchevski... Les expériences portent non sur l'espace, mais sur des corps » ⁽¹⁾.

Par rapport aux théories existantes, la relativité cinématique s'oppose donc essentiellement à la relativité généralisée, le ds^2 de notre espace de représentation étant une convention, que l'on peut à volonté modifier pour obtenir des lois de forme plus simple.

Il est évidemment plus logique, en cas de désaccord avec l'expérience, de modifier les lois utilisées que l'espace de représentation...

La théorie de Milne n'en appartient pas moins à la famille des théories relativistes classiques; en particulier elle est aussi foncièrement déterministe que celles-ci, au moins dans son état actuel; et il est inutile pour le moment d'y chercher une théorie des mouvements à l'échelle microscopique... à moins d'élargir considérablement ses bases.

Notre travail montre simplement qu'elle permet :

- 1) de donner des phénomènes classiques de la gravitation et de l'électromagnétisme une théorie synthétique extrêmement simple;
- 2) de prévoir un champ magnétique pour des corps électrostatiquement neutres en mouvements relatifs (cas des corps tournants);
- 3) d'affirmer, sous des hypothèses très générales, qu'il n'existe pas d'autres interactions de deux corps que les phénomènes connus de gravitation et d'électromagnétisme.

CHAPITRE PREMIER

Le problème des deux observateurs.

A. *Les opérateurs* Ω . — Nous admettrons, avec M. J. L. Destouches ⁽²⁾ les postulats suivants :

Ob A possédant une horloge mesurant des instants t ,

⁽¹⁾ *Relativity, Gravitation and world structure*, chap. 1^{er}.

⁽²⁾ J. L. DESTOUCHES. *Corpuscules et Systèmes de Corpuscules*. Paris, 1941, p. 55 et s.

Ob B des instants t' :

(1) Un observateur peut émettre un signal, et en recevoir, à tout instant marqué par son horloge.

(2) Le signal émis par Ob_A en t_1 est réfléchi par Ob B en t'_B , et reçu à nouveau en Ob_A en t_A :

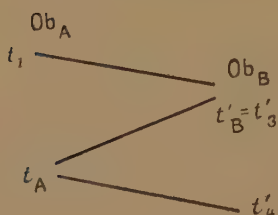


Fig. 1.

a) t_A est postérieur à t_2 : $t_A > t_1$;

b) la correspondance t_1, t'_B est biunivoque.

(3) t'_B est fonction uniquement de t_1 et de la paire d'observateurs Ob A et Ob B ; l'ordre de succession des signaux reçus en Ob_B est le même que celui des signaux émis en Ob_A.

Soit $Z_{AB} = Z(Ob_A, Ob_B)$ une fonction biunivoque des observateurs Ob_A, Ob_B.

Et posons (postulat 3) :

$$\begin{aligned} t_A &= f(t_1, Z_{AB}) & t'_B &= g(t_1, Z_{AB}) \\ t'_4 &= f'(t'_B, Z_{BA}) & t_A &= g'(t'_B, Z_{BA}). \end{aligned}$$

Nous avons, d'après les définitions, les relations :

$$\begin{aligned} f(t_1, Z_{AB}) &= g'(t'_B, Z_{BA}) = g'[g(t_1; Z_{AB}); Z_{BA}] \\ t'_4 &= f'(t'_B, Z_{BA}) = f'g(t_1, Z_{AB}); \\ Z_{BA} &= g(t_A, Z_{AB}) = g[f(t_1, Z_{AB}; Z_{AB})] = g[g'(t'_B, Z_{BA}); Z_{AB}]. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(t, Z_{AB}) &= g'[g(tZ_{AB}); Z_{BA}] \\ f(t', Z_{BA}) &= g[g'(t'Z_{BA}); Z_{AB}] \end{aligned}$$

g et g' dépendent des horloges de Ob A et Ob B ; f et f' de l'une des deux seulement. On voit que les combinaisons qu'elles définissent de g et g' ne dépendent que d'une seule horloge.

On peut considérer la fonction g comme définie par une transformation de l'ensemble des t en un ensemble des t' qui dépend de Z_{AB} . Soit Ω_{AB} cette transformation ; de même Ω_{BA} associée à g' :

$$g = \Omega_{AB}t ; \quad g' = \Omega_{BA}t'_B ; \quad f = \Omega_{BA}\Omega_{AB}t_1 ; \quad f' = \Omega_{AB}\Omega_{BA}t'_B.$$

Les quantités égales à t'_4 nous donnent :

$$(\Omega_{AB}\Omega_{BA})\Omega_{AB} = \Omega_{AB}(\Omega_{BA}\Omega_{AB}).$$

Deux observateurs Ob A et Ob B sont dits équivalents si $\Omega_{AB} = \Omega_{BA}$; l'équivalence sera symboliquement notée $A \equiv B$ ou $Ob_A \equiv Ob_B$.

B. *Description des événements* par un observateur. — Définissons en A, à l'aide de t_1 et $t_2 = f(t_1, Z_{AB})$, une distance de B, ainsi qu'une époque T_B de l'instant où B a reçu le signal émis en A.

$$\begin{aligned} T_B &= f_T(t_1, f(t_1, Z_{AB})) \\ R_B &= f_R(t_1, f(t_1, Z_{AB})). \end{aligned}$$

Conventions. — Si on change l'origine des temps en ajoutant t_0 à tous les instants mesurés, on a :

$$\begin{aligned} (1) \quad T_B + t_0 &= f_T(t_1 + t_0, t_2 + t_0) \\ (2) \quad R_B &= f_R(t_1 + t_0, t_2 + t_0). \end{aligned}$$

La solution des équations (1) et (2) est, en posant $t_1 - t_2 = 2u$, $t_1 + t_2 = 2v$:

$$\begin{aligned} (2)' \quad f_R(u, v) &= f_R(u, v + t_0); \\ (1)' \quad f_T(u, v) + t_0 &= f_T(u, v + t_0); \end{aligned}$$

t_0 étant quelconque, posons $t_0 = -v$; il vient :

$$\begin{aligned} f_R(u, v) &= f_R(u, 0) \\ f_T(u, v) &= f_T(u, 0) + v. \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} R_B &= \varphi_2(t_2 - t_1) \\ T_B &= \frac{1}{2}(t_1 + t_2) + \varphi_1(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

φ_1 et φ_2 sont des fonctions quelconques.

Remarquons qu'il est inutile de supposer f_R et f_T continues et différentiables.

Exprimons ces résultats au moyen des opérateurs Ω :

$$T_B = f_T(t_1, \Omega_{BA}\Omega_{AB}t_1) = \frac{1}{2}(t_1 + \Omega_{BA}\Omega_{AB}t_1) + \varphi_1(\Omega_{BA}\Omega_{AB}t_1 - t_1).$$

Donc on peut exprimer inversement, en supposant que toutes les fonctions employées ont des inverses :

$$\begin{aligned} t_1 &= f_1(T_B, Z_{AB}) = \left[\frac{1}{2}(1 + \Omega_{BA}\Omega_{AB}) + \varphi_1(\Omega_{BA}\Omega_{AB} - 1) \right]^{-1} T_B \\ R_B &= \Phi(T_B, Z_{AB}) \\ t'_B &= f_{12}(T_B, Z_{AB}) \\ R'_B &= \varphi_2(t_2 - t_1) = \varphi_2[\Omega_{BA}\Omega_{AB} - 1] \left[\frac{1}{2}(1 + \Omega_{BA}\Omega_{AB}) + \varphi_1(\Omega_{BA}\Omega_{AB} - 1) \right]^{-1} T_B. \end{aligned}$$

Dans le calcul de B :

$$R'_A = \varphi_2[\Omega_{AB}\Omega_{BA} - 1] \left[\frac{1}{2}(1 + \Omega_{AB}\Omega_{BA}) + \varphi_1(\Omega_{AB}\Omega_{BA} - 1) \right]^{-1} T'_A$$

de même :

$$t'_B = \Omega_{AB} \left[\frac{1}{2} (1 + \Omega_{BA} \Omega_{AB}) + \varphi I (\Omega_{BA} \Omega_{AB} - 1) \right]^{-1} T_B = f_{12}(T_B, Z_{AB})$$

$$t'_A = \Omega_{BA} \left[\frac{1}{2} (1 + \Omega_{AB} \Omega_{BA}) + \varphi I (\Omega_{AB} \Omega_{BA} - 1) \right]^{-1} T'_A = f_{21}(T_A, Z_{BA})$$

Si les deux observations sont équivalentes, $\Omega_{AB} = \Omega_{BA}$, nous avons les relations :

$$\begin{aligned} \Phi(x, Z_{AB}) &= \Phi'(x, Z_{BA}) \\ f_{12}(x, Z_{AB}) &= f_{21}(x, Z_{BA}). \end{aligned}$$

On posera, par convention :

$$\varphi I = 0 : T_B = \frac{1}{2} (t_2 + t_2).$$

$$\varphi 2 = \frac{c}{2} : R_B = \frac{c}{2} (t_2 - t_1)$$

La constance de c n'est donc, comme l'a montré Milne, que le résultat d'une convention.

Supposons maintenant les fonctions g et g' dérivables ; Ω_{AB} et Ω_{BA} définiront aussi des fonctions dérivables, d'où Φ et f également.

On peut donc définir la vitesse relativement aux observations de $Ob A$:

$$V_{\frac{B}{A}}(T_B) = \frac{d\Phi(T_B, Z_{AB})}{dT_B}$$

inversement :

$$V_{\frac{A}{B}}(T'_A) = \frac{d\Phi(T'_A, Z_{BA})}{dT'_A}$$

Si les deux observateurs sont équivalents, $V_{\frac{B}{A}}(x) = V_{\frac{A}{B}}(x)$.

C. *Théorème fondamental 1.* — Il est possible de graduer l'horloge de A de manière que $V_{\frac{B}{A}}(x)$ soit une constante, pourvu que $V_{\frac{B}{A}}(x)$ soit une fonction analytique de signe constant.

Effectuons en effet la transformation $T_B = X(T_{IB})$. Nous avons :

$$\frac{d\Phi}{X'(T_{IB})dT_{IB}} = V_{\frac{B}{A}}[X(T_{IB})].$$

L'équation $X'(T_{IB}) + V_{\frac{B}{A}}[X(T_{IB})] = V_1$ nous définit la fonction $X(T_{IB})$ croissante à une constante d'intégration près ; d'où ensuite la fonction de regraduation de l'horloge A .

Théorème fondamental 2 (Milne et Whitrow) ⁽¹⁾. — Il est possible

⁽¹⁾ E. A. MILNE et G. F. WHITROW. *On the meaning of uniform time.* *Zeits. für Astrophysik*, B. 15, 1938, 269.

de graduer l'horloge de $Ob\ B$ de manière que $Ob\ B \equiv Ob\ A$. Soit en effet t' le temps indiqué par l'horloge de $Ob\ B$ et T' le temps indiqué une fois qu'elle a été regraduée; entre t' et T' nous aurons une relation définie par la transformation biunivoque, croissante, deux fois dérivable, que nous pouvons représenter encore par X :

$$\begin{array}{l} T' = X t' \\ T'_B = X \Omega_{AB} t_1 \\ t_2 = \Omega_{BA} X^{-1} T'_B \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} t' = X^{-1} T'. \\ \text{Les horloges seront équivalentes si :} \\ X \Omega_{AB} = \Omega_{BA} X^{-1} \end{array} \right.$$

Soit :

$$X \Omega_{AB} X = \Omega_{BA}$$

posons :

$$X^* = X \Omega_{AB}.$$

L'équation devient, après multiplication à droite par Ω_{AB} :

$$(X^*)^2 = \Omega_{BA} \Omega_{AB}. \text{ D'où la détermination de } X^*(t).$$

On démontre que cette détermination se fait à partir de mesures effectuées par $Ob\ A$ seul. $Ob\ A$ communique ses résultats, et $Ob\ B$ peut refaire sa graduation.

Il résulte de ces deux théorèmes qu'étant donnés deux observateurs, il est possible de les considérer, après graduation convenable des deux horloges, comme équivalents et en mouvement relatif uniforme au moins par intervalles. On a alors $V_{\frac{A}{B}} = V_{\frac{B}{A}}$.

La vitesse radiale du premier observateur par rapport au deuxième est égale à celle du deuxième par rapport au premier.

D. *Relation entre f et Φ .* — Nous avons :

$$\begin{array}{lll} R_B = \frac{c}{2} (t_2 - t_1) & R'_A = \frac{c}{2} (t'_4 - t'_3) \\ T_B = \frac{1}{2} (t_2 + t_1) & T'_A = \frac{1}{2} (t'_4 + t'_3) \\ T_B + \frac{R_B}{c} = t_2 & T'_A + \frac{R'_A}{c} = t'_4 & T_B + \frac{R_B}{c} = \Omega_{BA} \left(T'_A - \frac{R'_A}{c} \right) \\ T_B - \frac{R_B}{c} = t_1 & T'_A - \frac{R'_A}{c} = t'_3 & T'_A + \frac{R'_A}{c} = \Omega_{AB} \left(T_B + \frac{R_B}{c} \right) \\ & & T'_A - \frac{R'_A}{c} = \Omega_{AB} \left(T_B - \frac{R_B}{c} \right) \end{array}$$

D'autre part, d'après les définitions :

$$\begin{array}{l} T_B + \frac{1}{c} \Phi(T_B, Z_{AB}) = f_{21}(T'_A, Z_{BA}) \\ T'_A - \frac{1}{c} \Phi(T'_A, Z_{BA}) = f_{12}(T_B, Z_{AB}). \end{array}$$

Les observateurs ayant été rendus équivalents, nous avons $\Phi = \Phi'$; $f_{21} = f_{12}$. Nous avons deux relations fonctionnelles entre T_B et T'_A , que nous écrivons pour simplifier :

$$\begin{aligned}x - \varphi(x) &= f(y) \\ y + \varphi(y) &= f(x).\end{aligned}$$

Nous poserons avec Milne ⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned}p_{12}(\xi) &= f^{-1}(\xi) - \varphi[f^{-1}(\xi)] \\ p_{21}(\xi) &= f^{-1}(\xi) + \varphi[f^{-1}(\xi)]\end{aligned}$$

remplaçons ξ par $f(\xi)$, il vient :

$$\begin{aligned}p_{12}f(\xi) &= \xi - \varphi(\xi) & \Bigg| & \quad p_{12}f(x) = f(y) \\ p_{21}f(\xi) &= \xi + \varphi(\xi) & \Bigg| & \quad p_{21}f(y) = f(x)\end{aligned}$$

éliminons $f(y)$: il vient $p_{12}f(x) = p_{21}^{-1}f(x)$: donc p_{21} et p_{12} sont des fonctions inverses.

D'où la solution générale, définie par :

$$\begin{aligned}f^{-1}(\xi) &= \frac{1}{2} [p_{12}(\xi) + p_{21}(\xi)] \\ \varphi(\xi) &= \frac{1}{2} [p_{12}(\xi) - p_{21}(\xi)].\end{aligned}$$

Supposons maintenant les vitesses uniformisées ; nous verrons :

$$T_B + \frac{R_B}{c} = \Omega_{BA}\Omega_{AB}\left(T_B - \frac{R_B}{c}\right) = s^2\left(T_B - \frac{R_B}{c}\right)$$

car $\Omega_{AB} = \Omega_{BA} = s$ constant ; on choisit l'origine des temps pour que la constante d'intégration soit nulle.

$t'_B = \frac{t_2}{s}$: s est la constante de l'effet Döppler.

On voit en même temps [$t_2 = p_{21}(t'_B)$] que :

$$\Omega_{BA} = \Omega_{AB} = p_{21} = s \qquad p_{12} = \frac{1}{s}.$$

On a pour la vitesse radiale :

$$v = c \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}; \qquad \text{d'où :} \qquad s = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

La convention essentielle dans ce problème est que pour $T = 0$, on a $R = 0$. C'est-à-dire que, pour simplifier, on a pris la convention de Milne, suivant laquelle les particules équivalentes ont coïncidé à un instant donné, qu'on prend pour origine.

⁽¹⁾ *Relativ. grav. and w. str.*, 33.

CHAPITRE II

Problème des trois observateurs.

L'analyse des échanges de signaux entre deux observateurs nous a permis de définir la distance d'un observateur quelconque à l'origine ; pour construire une représentation géométrique des mouvements observés, nous devons maintenant définir la distance relative de deux observateurs quelconques.

A. *Signaux relatifs à 3 corps.* — Soit l'ensemble des signaux représentés par le schéma ci-contre :

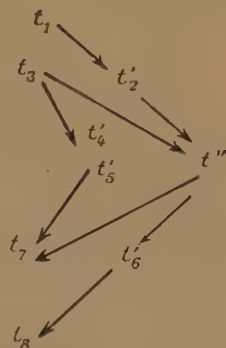


Fig. 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} t'_2 = \Omega_{AB} t_1 \\ t'_3 = \Omega_{AB} t_3 \\ t'_6 = \Omega_{CB} t'' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t'' = \Omega_{BC} \\ t_7 = \Omega_{BA} \\ t_8 = \Omega_{BA} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t'_2 = \Omega_{AC} \\ t'_5 = \Omega_{CA} \\ t'_6 = \Omega_{CB} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t_3 \\ t'' \\ t'_6 \end{array} \right.$$

Nous avons, d'autre part, d'après le chapitre premier, les ensembles de formules :

$$\begin{aligned} T_c + \frac{R_c}{c} &= t_1 ; & T_c - \frac{R_c}{c} &= t_3 ; & T'_c + \frac{R'_c}{c} &= t'_6 ; & T'_c - \frac{R'_c}{c} &= t'_2 \\ t_3 &= \Omega_{AC}^{-1} \Omega_{BC} t' ; & t'' &= \Omega_{CB}^{-1} t'_6 . \end{aligned}$$

Donc :

$$(1) \quad T_c + \frac{R_c}{c} = \Omega_{CA} \Omega_{CB}^{-1} \left(T'_c + \frac{R'_c}{c} \right)$$

$$T_c - \frac{R_c}{c} = \Omega_{AC}^{-1} \Omega_{BC} \left(T'_c - \frac{R'_c}{c} \right)$$

$$(2) \quad T'_A + \frac{R'_A}{c} = \Omega_{AB} \Omega_{AC}^{-1} \left(T''_A + \frac{R''_A}{c} \right)$$

$$T'_A - \frac{R'_A}{c} = \Omega_{BA}^{-1} \Omega_{CA} \left(T''_A - \frac{R''_A}{c} \right)$$

$$(3) \quad T_B + \frac{R_B}{c} = \Omega_{BA} \Omega_{BC}^{-1} \left(T''_B + \frac{R''_B}{c} \right)$$

$$T_B - \frac{R_B}{c} = \Omega_{AB}^{-1} \Omega_{CB} \left(T''_B - \frac{R''_B}{c} \right)$$

B) Pour évaluer la distance $Ob B$, $Ob C$, $Ob A$ peut utiliser deux procédés :

a) utilisation directe des évaluations de $Ob B$, $Ob C$.

Pour cela, ayant fixé à l'avance un instant t , $Ob A$ émet un signal à l'instant $\Omega_{AB}^{-1}t$, et un autre à l'instant $\Omega_{AC}^{-1}t$; ces signaux seront reçus respectivement en $Ob B$, $Ob C$ au même instant t de leurs horloges; ils opèrent alors l'échange de signaux habituel pour deux observateurs, et communiquent à $Ob A$ leurs résultats :

$$R_{BC} = c/2(\Omega_{BC}\Omega_{CB} - 1)t; \quad R_{CB} = c/2(\Omega_{CB}\Omega_{BC} - 1)t.$$

Pour que $Ob A$ puisse en déduire une évaluation de la distance relative de $Ob B$, $Ob C$ en fonction de t , il faut et il suffit que ces deux grandeurs soient égales, c'est-à-dire en définitive : $\Omega_{BC} \cdot \Omega_{CB} = \Omega_{CB} \cdot \Omega_{BC}$.

Théorème. — Pour qu'un observateur $Ob A$ puisse construire une représentation géométrique du mouvement d'un ensemble de corps, il faut que, tous les observateurs associés ayant été séparément rendus équivalents à $Ob A$, tous leurs opérateurs Ω relatifs commutent 2 à 2.

La propriété envisagée se conserve-t-elle pour d'autres graduations ?

Soient les transformations :

$$T = Xt; \quad T' = Yt'; \quad T'' = Zt''.$$

ω et Ω les opérateurs Ω correspondant aux deux graduations.

La condition d'équivalence après les regraduations nous donne :

$$t'_3 = Y^{-1}T'_3 = \omega_{AB}t_1 = \omega_{AB}X^{-1}T_1 \\ t_2 = X^{-1}T_2 = \omega_{BA}t'_3 = \omega_{BA}Y^{-1}T'_3.$$

D'où :

$$\Omega_{AB} = Y\omega_{AB}X^{-1} = X\omega_{BA}Y^{-1} = \Omega_{BA}.$$

Cette égalité se transforme immédiatement en :

$$X^{-1}Y\omega_{AB} = \omega_{BA}Y^{-1}X.$$

Soit, en posant :

$$X^{-1}Y = \Phi; \quad \Phi\omega_{AB} = \omega_{BA}\Phi^{-1}; \quad \text{D'où : } [\Phi\omega_{AB}]^2 = \omega_{AB}\omega_{BA}.$$

Il en résulte, si $\omega_{AB} = \omega_{BA}$, que $\Phi = I$, d'où : $X = Y$. Par conséquent les lois de transformations des deux horloges sont les mêmes; et il en est encore de même pour toutes les horloges équivalentes : $X = Y = Z$. Il en résulte que si deux signaux ont été émis par $Ob B$, $Ob C$ aux mêmes instants de leurs horloges respectives, il en sera encore de même après les regraduations. Par conséquent les opéra-

teurs Ω relatifs commutent toujours, et la propriété caractérise bien l'espace et non une graduation particulière des horloges. Nous voyons apparaître ici le déterminisme physique comme lié à une commutation entre opérateurs. Une théorie complète du point de vue physique se placerait dans le cas général ; nous ne l'aborderons pas ici.

b) Si Ob A utilise au contraire les temps de parcours des signaux faisant le tour du triangle ABC en sens inverses, on obtient la condition plus restrictive : $\Omega_{BC} = \Omega_{CB}$. Cette condition revient à admettre que la lumière (ou les signaux), a la même vitesse dans le sens BC et dans le sens CB ; on a vu que pour les échanges entre deux observateurs cette constance de la vitesse de la lumière n'était qu'une convention, mais il ne s'agissait que d'une vitesse moyenne sur deux parcours inverses. Nous voyons qu'on peut s'en tenir à cette convention, et construire une représentation géométrique sans conditions supplémentaires, mais le principe d'Einstein apporte réellement un postulat physique nouveau, dont nous verrons l'importance dans les formules de Lorentz.

2) On peut faire dériver la notion d'angle de celle de temps d'après la mesure astronomique du temps sidéral ; il n'y a donc pas de difficulté pour définir l'égalité des angles, ainsi que l'angle droit.

Le postulat fondamental de la géométrie consiste dès lors à considérer comme fixes relativement deux observateurs que Ob A considère comme fixes ; autrement dit, si l'angle AB, AC reste constant, il existe une relation homogène entre les grandeurs AB, BC, CA (c, a, b).

Soit $f(a, b, c) = u$ la relation déterminée, nous dirons que u est une mesure de l'écart angulaire (AB, AC). Soient de même :

$$f(b, c, a) = v; \quad f(c, a, b) = w.$$

Il résulte de la relation d'Euler pour ces fonctions homogènes et de degré 0, que leur déterminant fonctionnel est nul ; par conséquent il existe une relation $\varphi(u, v, w) = 0$; de plus pour u, v, w fixés, a, b, c sont proportionnels à une même fonction du temps ; la relation $f = u$ peut se résoudre par rapport à a : soit $a = g(b, c, u)$.

Théorème fondamental. — Par une regraduation convenable, on peut obtenir l'équation $a_1 = g_1(b_1, c_1, u)$, g_1 étant une fonction arbitraire. En effet, les lois de transformations des trois horloges étant les mêmes, nous avons $b_1 = h(b)$; $c_1 = h(c)$; $a_1 = h(a)$.

$$a = h^{-1}(a_1) = g[h^{-1}(b_1), h^{-1}(c_1), u].$$

$$a_1 = h[g(h^{-1}(b), h^{-1}(c), u)] = g_1(b_1, c_1, u);$$

équation qui détermine h , et par suite la fonction X de regraduation.

Il en résulte en particulier qu'on peut choisir les conventions et les relations métriques de l'espace euclidien, le seul postulat (ou la seule

approximation) concernant la détermination des longueurs sur des droites ne passant pas par l'origine.

Dans le cas où les trois observateurs sont en mouvements relatifs rectilignes de la forme $P = Vt$, les formules (1), (2), (3) nous donnent des lois analogues à celles de Lorentz.

Cas des observateurs alignés. — Changement de repère à vitesse constante.



Fig. 3.

Nous avons la relation A, B, C, ayant les positions de la figure :

$$\begin{aligned}\Omega_{AC} &= \Omega_{BC} \Omega_{AB} = \Omega_{BC} s_{AB} \\ \Omega_{CA} &= s_{BA} \Omega_{CB} \qquad \Omega_{AC}^{-1} = \frac{1}{s_{AB}} \Omega_{BC}^{-1}.\end{aligned}$$

D'où en portant dans (1), les particules étant confondues pour $t = 0$:

$$\begin{aligned}T_c + \frac{R_c}{c} &= s_{BA} \left(T'_c + \frac{R'_c}{c} \right) \\ T_c - \frac{R_c}{c} &= \frac{1}{s_{AB}} \left(T'_c - \frac{R'_c}{c} \right).\end{aligned}$$

D'où les formules de Lorentz généralisées :

$$\begin{aligned}T &= \frac{T' + \frac{VR'}{c^2}}{\frac{2s_{AB}}{1 + s_{AB}s_{BA}}} & R &= \frac{R' + VT'}{\frac{2s_{AB}}{1 + s_{AB}s_{BA}}}.\end{aligned}$$

On voit que $T^2 - \frac{R^2}{c^2}$ n'est un invariant que si $s_{BA} = s_{AB}$; par conséquent les formules de Lorentz classiques ne sont valables qu'entre observateurs strictement équivalents. (Convention de mesure *b*)).

C) *Principe d'équivalence.* — Milne a montré ⁽¹⁾ qu'on pouvait choisir l'invariance des accélérations, rapportées à un groupe d'observateurs formant un sous-groupe de Lorentz.

Calcul de l'accélération (Soient o et o' deux observateurs équivalents, en mouvement relatif uniforme, et confondus à l'origine des temps). — Nous avons vu qu'on passait d'un système à l'autre par transformation de Lorentz;

(1) MILNE, *op. cit.*, note additive 3.

Soient P, V, t ; P', V', t' , les coordonnées d'un événement :

$$\frac{dV}{dt} = g(P, V, t); \quad \frac{dV'}{dt'} = g'(P', V', t')$$

d'après la condition d'invariance, nous avons : $g' = g$.

Soit alors U la vitesse relative de o et o' ; le passage de P, V , à P', V' , s'exprime par les formules :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Ut}{\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}; & y' &= y; & z' &= z; & t' &= \frac{t - \frac{Ux}{c^2}}{\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ u' &= \frac{u - U}{1 - \frac{uU}{c^2}}; & v' &= \frac{v \left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{uU}{c^2}}; & w' &= \frac{w \left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{uU}{c^2}} \end{aligned}$$

soit :

$$f = \frac{du}{dt} \quad g = \frac{dv}{dt} \quad h = \frac{dw}{dt}$$

De même :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} f' &= \frac{du'}{dt'} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{uU}{c^2}\right)^3} f \\ g' &= \frac{1 - \frac{U^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{uU}{c^2}\right)^2} g + \frac{1 - \frac{U^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{uU}{c^2}\right)^3} \frac{vU}{c^2} f \\ h' &= \frac{1 - \frac{U^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{uU}{c^2}\right)^2} h + \frac{1 - \frac{U^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{uU}{c^2}\right)^3} \frac{wU}{c^2} f. \end{aligned} \right.$$

D'où le système de trois équations fonctionnelles :

$$f(P'V't') = \frac{\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{uU}{c^2}\right)^3} f(P, V, t)$$

et les 2 autres équations en g, h . $P, V, t, P'V't'$ étant liés, par les équations de Lorentz.

On obtiendra encore deux autres systèmes d'équations en changeant d'observateur $o'(U, o, o, o, U, o, o, o, U)$.

Posons :

$$X = t^2 - \frac{P^2}{c^2} \quad Y = 1 - \frac{V^2}{c^2} \quad Z = t - \frac{P, V}{c^2}$$

et effectuons la substitution :

$$\begin{cases} f(P, V, t) = Y\alpha(P, V, t) \\ f(P'V't') = Y'\alpha(P'V't') \end{cases} \quad \begin{cases} g = y\beta(P, V, t) \\ h = y'\gamma(P, V, t) \dots \end{cases}$$

il vient :

$$\alpha(P'V't') = \frac{\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{uU}{c^2}} \alpha(P, V, t), \text{ etc.}$$

d'après la forme du coefficient, on peut encore faire la substitution :

$$\begin{aligned} \alpha(P, V, t) &= (x - ut)L(P, V, t) \\ \beta(P, V, t) &= (y - vt)M(P, V, t) \\ \gamma(P, V, t) &= (z - wt)N(P, V, t) \end{aligned}$$

Il vient :

$$L(P', V', t') = L(P, V, t)$$

en permutant les vitesses $U, 0, 0$ avec $0, U, 0, 0, U$, nous avons :

$$\begin{aligned} M(P'V't') &= M(P, V, t) \\ N(P'V't') &= N(P, V, t); \end{aligned}$$

et l'on voit de plus que $L = M = N$.

L, M, N sont donc invariants dans toute transformation de Lorentz, donc de la forme $L\left(X, \frac{Z^2}{Y}\right)$, ces deux scalaires étant les seuls éléments invariants relatifs à un élément de contact.

Donc :

$$\frac{dv}{dt} = Y(P - Vt)G\left(X, \frac{Z^2}{Y}\right).$$

G devant avoir la dimension Y^{-2} , on peut l'écrire $X^{-1}G_1\left(X, \frac{Z^2}{Y}\right)$; $G_1\left(\frac{Z^2}{Y}, X\right)$ devant avoir la dimension 0; donc de la forme $G_1\left(\frac{Z^2}{XY}\right)$.

Ou, en posant $\frac{Z^2}{XY} = \xi$: $G_1(\xi)$.

On a donc l'expression générale donnée par Milne :

(12)

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = (P - Vt) \frac{Y}{X} G(\xi)}$$

D) L'existence de cette solution du groupe d'équations fonctionnelles (11) montre :

1° que pour toutes particules dont la vitesse initiale est $V = \frac{P}{t}$, la

vitesse est constante, et reste de la forme $\frac{P}{t}$ pour toutes les particules équivalentes à 0 d'où l'existence d'un système de particules fondamentales ;

2° que le mouvement d'une particule est entièrement déterminé par les conditions cinématiques d'équivalence. On est donc en présence d'une théorie nettement déterministe dans son principe.

Supposons à présent le principe d'équivalence vérifié pour un système cinématique simple ; est-il vérifié pour un autre système ?

Soit un corps quelconque dont on connaît la vitesse et la position à l'instant t , et auquel nous puissions associer un observateur et une horloge. Il existe à l'instant t une particule fondamentale dont la vitesse est la même, donc en repos relatif : soit A cette particule que nous prendrons pour origine, A' le corps à étudier.

On peut regraduer l'horloge de A' de manière qu'elle soit équivalente à A. Les deux particules étant désormais équivalentes, les distances et vitesses radiales réciproques sont les mêmes fonctions des temps propres respectifs ; de plus, d'après la formule fondamentale, $\frac{dV}{dt} = (P - Vt) \frac{YG}{X}(\xi)$, l'accélération de A est dirigée vers A, et aussi la vitesse initiale ; dans le système lié à A', il en sera de même, et l'expression de l'accélération initiale sera la même. Or cette expression est invariante par transformation de Lorentz ; l'expression de l'accélération de A dans les systèmes de référence de tous les observateurs du système fondamental lié à A', est la même, toujours avec la fonction $G(\xi)$ initiale.

Par conséquent un observateur arbitraire peut être choisi pour origine d'un système cinématique simple, sous la seule condition d'être équivalente à un observateur fondamental d'un système vérifiant déjà l'invariance des accélérations. Il faut remarquer que cette invariance n'est pas vérifiée pour un système quelconque ; car en général la transformation $t' = f(t)$ ne conserve pas le système cinématique simple ; pour qu'il en soit ainsi on doit avoir la relation :

$$\frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{f(t_2) + f(t_1)} k,$$

k étant une constante ; la solution de cette équation fonctionnelle est $f(t) = Ct^k$.

La condition physique d'invariance des accélérations étant vérifiée pour un système, elle sera vérifiée pour tous les systèmes *effectivement réalisés* par synchronisation de leur origine avec un observateur quelconque du système initial. Nous voyons ici encore les rapports avec l'intuitionnisme.

Cette propriété est très importante pour les applications pratiques, comme nous le verrons dans l'étude dynamique du problème des deux corps.

Quel est le système initial qu'on peut supposer vérifier le principe ? Nous pouvons admettre avec Milne, que l'ensemble des noyaux des nébuleuses extragalactiques constitue un tel système ; le problème qui se pose alors du point de vue pratique est alors celui de la synchronisation de nos horloges avec ce système, c'est-à-dire la détermination la plus exacte du temps : c'est le problème de toute l'astronomie.

E) Milne a, de plus, étudié le problème de l'*équivalence d'ensemble*, où deux observateurs sont astreints non seulement à attribuer aux mouvements de chaque système particulier des accélérations identiques, mais encore toute la distribution statistique de l'univers. Ce problème a une solution, mais la notion d'équivalence d'ensemble n'est pas nécessaire pour étudier le mouvement des particules, et pas davantage pour la formation d'une mécanique cohérente. On peut donc sans aucune difficulté supplémentaire se placer dans des conditions plus générales que celles de Milne ; ce qui évite en particulier la conclusion suivante : Dans les systèmes dits « statistiques » où l'on considère des ensembles de particules non fondamentales, Milne démontre qu'il existe nécessairement des condensations infinies de matière au voisinage des particules fondamentales, donc des noyaux des nébuleuses, qu'il identifie, en raison de la loi de Hubble, à des particules fondamentales.

Comment se fait-il alors que nous ayons si peu de condensations de matière, alors qu'on peut placer en chaque point une particule fondamentale, qui a dans une direction donnée une vitesse donnée, pour un observateur. Nous ne conserverons donc pas cette hypothèse, qui n'est pas nécessaire au développement de la théorie.

CHAPITRE III

Etude du mouvement général d'un point.

A) La propriété essentielle de l'équation fondamentale :

$$(1) \quad \frac{aV}{dt} = (P - Vt) \frac{y}{X} G(\xi)$$

est d'être invariante lorsqu'on passe d'un observateur fondamental o à un observateur o' équivalent, c'est-à-dire dans une transformation de Lorentz. Il est donc intéressant d'étudier son interprétation géométrique dans l'espace de Minkowski, comme l'a fait M. Wilson ⁽¹⁾, en se plaçant pour simplifier dans le cas du mouvement rectiligne.

(1) *Philosophical Magazine*, 1943.

par conséquent, lorsque $x = w \operatorname{tg} \varphi$, le mouvement sera rectiligne, R étant infini ; d'autre part, $x \cos \varphi - w \sin \varphi$ est la distance algébrique de Ω à $\Omega'P$; d'où l'équation géométrique :

$$(2) \quad \frac{1}{R} = \frac{p}{p^2} G(\xi).$$

Cette équation se transposera en éléments réels ayant une signification simple dans la transformation de Lorentz par projection sur les axes.

$$\frac{\vec{dt}}{ds} = -\frac{\vec{h}}{R}.$$

$\vec{t}$ a pour projection $\frac{1}{Y^2}$, $\frac{V}{icY^2}$ la projection sur Ox de $\frac{\vec{dt}}{ds}$ est donc :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{1}{Y^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{V}{Y^2} \right) &= \frac{p \cos \varphi}{x^2 + w^2} G(\xi) = \frac{x - (x \sin \varphi + w \cos \varphi)}{(x^2 + w^2)} \sin \varphi G(\xi) \\ &= -\frac{1}{c^2} \left(P - \frac{VZ}{Y} \right) \frac{G(\xi)}{X}. \end{aligned}$$

On obtient de même la composante de temps en remplaçant P par ct , V par c ; on vérifie aisément que les formules sont générales.

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{1}{Y^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{V}{Y^2} \right) &= \left(P - \frac{VZ}{Y} \right) \frac{G(\xi)}{X} \\ \frac{1}{Y^2} \frac{d}{dt} \frac{c}{Y^2} &= \left(ct - \frac{cZ}{Y} \right) \frac{G(\xi)}{X} \end{aligned}}$$

B) L'équation (2) s'interprète de façon particulièrement simple lorsque $G(\xi) = -1$. Dans ce cas, d'après $R = -\frac{c^2}{p}$, le triangle ΩPC est rectangle, et d'après $NC = -p''$, nous avons :

$$\Omega N^2 = p'^2 = pp''.$$

De $p'^2 - pp'' = 0$, nous déduisons $\frac{p'}{p} = \text{constante}$.

Par conséquent le diagramme du mouvement est une spirale logarithmique, et nous avons, fait remarquable, une intégrale première très simple, qui est $\cos V$, V étant l'angle classique en coordonnées polaires de la tangente avec le rayon vecteur $\cos V = \xi^{\frac{1}{2}}$.

Réciproquement, la condition $\xi = \text{constante}$ entraîne $G(\xi) = -1$; il suffit de faire le calcul inverse pour s'en rendre compte.

De l'équation $\rho = \lambda e^{\theta \cotg V}$ on peut passer rapidement aux coordonnées réelles :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{ict} \operatorname{th} i\theta = \frac{x}{ct} e^{2i\theta} = \frac{ct+x}{ct-x}.$$

D'où l'équation :

$$(4) \quad c^2 t^2 - x^2 = \lambda \left(\frac{ct+x}{ct-x} \right)^{\frac{1}{\xi^2}} (\xi-1)^{\frac{1}{2}}.$$

posons :

$$\frac{\xi^2}{(\xi-1)^{\frac{1}{2}}} = \alpha \quad \text{et :} \quad \begin{cases} ct-x=2u \\ ct+x=2v \end{cases}$$

Nous avons :

$$u = \lambda' v^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \frac{\alpha-1}{\alpha+1} > 0$$

par conséquent tous les diagrammes du mouvement ont une forme parabolique semblable, qui montre que le mobile part de l'origine avec la vitesse absolue c , puis s'arrête et revient en arrière, et pour $t \rightarrow +\infty$, la vitesse tend vers c .

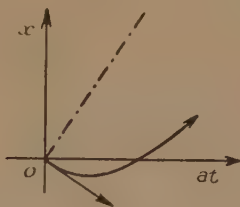


Fig. 5.

C) *Intégration du mouvement plan dans le cas où $G(\xi) = -1$.* — Deux intégrales du mouvement sont :

1° *Moment cinétique :*

$$\frac{1}{Y^2} \frac{d}{dt} \left(P \wedge \frac{V}{Y^2} \right) = -P \left(P - \frac{VZ}{Y} \right) \frac{1}{X} = \left(P \wedge \frac{V}{Y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{X^2}$$

en passant à la variable $X^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dX^{\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{Z}{X^{\frac{1}{2}}} = \xi^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} \right)$. Il vient :

$$\xi^{\frac{1}{2}} \left[\frac{d}{dX^{\frac{1}{2}}} \left(P \wedge \frac{V}{y^{\frac{1}{2}}} \right) - \left(P \wedge \frac{V}{y^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{1}{X^{\frac{1}{2}}} \right] = 0.$$

D'où : $P \wedge \frac{V}{y^{\frac{1}{2}}} = \vec{A} X^{\frac{1}{2}}$, A étant un vecteur constant.

2° D'autre part, la dérivée du vecteur $P - Vt$ étant collinéaire à ce vecteur, il a une direction constante.

$$\text{Posons :} \quad P - Vt = f\theta \quad \theta = (Z^2 - X\gamma)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{et :} \quad P \wedge V = cl\theta,$$

en remarquant que, d'après l'identité de Lagrange, $f^2 - l^2 = c^2$. D'après le théorème du moment cinétique,

$$(5) \quad \frac{P \wedge V}{X^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}}} = c \vec{l} (\xi - 1)^{\frac{1}{2}} = \text{constante.}$$

$$(6) \quad \frac{P - Vt}{X^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}}} = \vec{f} (\xi - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Projetons (6) sur deux axes, il vient :

$$(7) \quad y - ty' = 0 \quad y = kct.$$

$$(8) \quad \frac{x - tx'}{X^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}}} = f(\xi - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, d'après (5) :

$$(5)' \quad k \frac{(x - tx')}{X^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}}} = l(\xi - 1)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{d'où :} \quad \frac{f}{l} = \frac{1}{k} \text{ constante.}$$

Il résulte alors de la relation $f^2 - l^2 = c^2$ que f et l sont constants, et par suite ξ d'après le théorème du moment cinétique.

Joignons encore à ces équations :

$$\frac{Z}{X^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{1}{2}}} = \frac{t - (xx' + yy')c^{-2}}{X^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{1}{2}}} = \xi^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons l'équation différentielle simple :

$$(9) \quad \frac{x - tx'}{t - \frac{xx' + yy'}{c^2}} = \lambda c.$$

Dans le cas où y est nul on retrouve rapidement les résultats précédents ; faisons de même dans le cas général, la transformation :

$$\begin{aligned} x - ct &= 2u \\ x + ct &= 2v \end{aligned}$$

On obtient une équation différentielle linéaire simple :

$$u(1 - k - \lambda^2) - u'v(1 + k) = k\lambda^2v$$

dont l'intégrale générale est $C_1v^\alpha + C_2v = u$.

On voit que $\frac{du}{dv}$ tend vers l'infini avec v comme dans le cas précédent, et la vitesse c est atteinte par le mobile pour $t \rightarrow +\infty$. La trajectoire a la forme approximative ci-contre.

D) *Etude du mouvement dans le cas où $G(\xi)$ est quelconque.* — Nous avons comme précédemment :

$$(7) \quad y - ty' = 0 \quad y = kct$$

$$(8) \quad x - tx' = \rho\theta$$

$$(5) \quad kc(x - tx') = cl\theta; \quad \text{donc : } \frac{f}{l} = \frac{1}{k}.$$

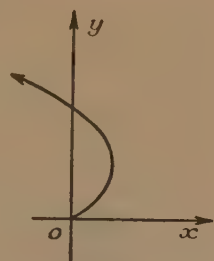


Fig. 6.

L'équation générale du mouvement est donc :

$$(9') \quad \frac{x - tx'}{(1 - k^2) \left(t - \frac{xx'}{c^2} \right)} = \frac{c}{\sqrt{1 - k^2}} \frac{(\xi - 1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^{\frac{4}{2}}}.$$

Nous nous placerons, ce qui n'ôtera rien à la génération des résultats, dans le cas du mouvement rectiligne $k = 0$.

Effectuons encore la transformation $\begin{matrix} x - ct = 2u \\ x + ct = 2v \end{matrix}$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{u - vu'}{u + vu'} &= \frac{(\xi - 1)^{\frac{1}{2}}}{\xi^{\frac{4}{2}}} \\ uv &= -Xc^2. \end{aligned}$$

Comme d'autre part l'a montré Milne dans son étude des trajectoires ⁽¹⁾ X et ξ sont liés par une équation différentielle simple.

On a en effet :

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= -\frac{2Z}{X}(\xi - 1)(1 + G(\xi)) \\ \frac{dX}{dt} &= 2Z. \\ \frac{1}{X} \frac{dX}{d\xi} &= \frac{-1}{(\xi + 1)(1 + G(\xi))}.\end{aligned}$$

On voit ici qu'à l'instant initial $1 + G(1) < 0$, car X croît avec ξ à partir de 1; d'après la continuité, $1 + G(\xi)$ reste ensuite < 0 , en effet supposons $1 + G(\xi_0) = 0$. ($\xi_0 > 1$) pour $\xi > \xi_0$, X est une fonction décroissante, donc ξ ne dépassera pas ξ_0 , et reviendra en arrière. Comme $G(\xi)$ doit être essentiellement supposée uniforme, c'est là une éventualité à écarter, X étant toujours croissant.

Posons donc $uv = F(\xi)$, et calculons u et v en fonction de ξ . Un calcul simple nous donne :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{du}{d\xi} &= \frac{1-k}{2} \frac{1}{F(\xi)} \frac{dF}{d\xi} \\ \frac{1}{v} \frac{dv}{d\xi} &= \frac{1+k}{2} \frac{1}{F(\xi)} \frac{dF}{d\xi} \end{aligned} \right.$$

On a de plus :

$$x'' = (x - tx') \frac{Y}{X} G(\xi).$$

On voit que x'' ne s'annule, en dehors des particules fondamentales, que pour $Y = 0$, donc $x' = c$; comme $|V| < c$, la vitesse doit alors passer par un maximum, et x'' doit changer de signe. Or $Y > 0$, $X > 0$, $G(\xi) < 0$. Ce n'est possible que si à ce moment $(x - tx')$ s'annule en changeant de signe, donc si $P = ct$. Il est donc impossible qu'une particule quelle qu'elle soit atteigne la vitesse c en un temps fini.

Par conséquent on ne peut atteindre ξ infini en un temps fini.

D'autre part, il résulte de l'expression de $\text{Log } X$ que la seule singularité de $1 + G(\xi)$ est 1, au plus, pour que, ξ étant une valeur quelconque, elle soit atteinte en un temps fini. $\frac{d \text{Log } X}{d\xi}$ étant toujours > 0 , ξ est une fonction croissante de X qui croît de 1 à $+\infty$, pour $OX < +\infty$.

Lorsque $\xi \rightarrow +\infty$, $k = \frac{(\xi - 1)^2}{\xi^2} \rightarrow 1$; $\frac{1}{u} \frac{du}{d\xi} \rightarrow 0$; donc $(x - ct)$ tend

vers une constante, et la vitesse limite est encore c . Par conséquent les conclusions générales et la forme des trajectoires sont les mêmes que dans le cas où $G(\xi) = -1$.

(1) MILNE. *Relativity Grav. and W. Struct.*, chap. VIII.

Notons ici le résultat manifestement inexact dans notre univers, d'une droite fixe dans l'espace telle que la trajectoire d'une particule soit constamment d'un même côté de cette droite (Ox). Il suffit de deux systèmes solaires de rotations propres indépendantes pour le montrer ou de deux nébuleuses dans le système de Milne. Nous pensons qu'il faut attribuer l'origine de ce paradoxe à la convention d'un univers condensé en un point à l'origine des temps.

CHAPITRE IV

Les éléments de la dynamique.

Nous avons étudié le mouvement absolu des particules, d'après les conditions cinématiques d'équivalence. Il nous faut maintenant rechercher comment cette théorie s'applique aux mouvements relatifs, c'est-à-dire, en gros, au problème des deux corps ; par conséquent nous essayerons d'identifier les grandeurs fondamentales de la dynamique.

A. — *Définition de la masse et de la force.* — La masse d'inertie peut se définir entièrement par les conditions suivantes :

1) C'est une fonction scalaire des variables P, V, t ; invariant relativiste, qui doit rester constante pour toute particule libre sur sa trajectoire.

2) Une particule fondamentale, dont le mouvement n'est modifié *a priori* par aucune action extérieure, est une particule libre.

Il résulte de ces conventions que M est uniquement fonction de ξ , seul invariant relativiste qui garde la valeur 1 pour toutes les particules fondamentales; il en résulte aussi la définition nécessaire du mouvement libre, dans lequel ξ doit rester constant. Nous avons vu au chapitre précédent que cette condition imposait : $G(\xi) = -1$. Nous définirons maintenant la force, d'après les conceptions classiques : « toute cause d'une perturbation dans le mouvement d'une particule libre ».

Les équations du mouvement libre ont la propriété de dépendre d'un paramètre arbitraire $M(\xi)$, soumis à la seule condition d'être une fonction analytique de ξ :

(1)

$$\frac{1}{Y^2} \frac{d}{dt} M(\xi) \frac{V}{Y^2} = - \left(P - \frac{VZ}{Y} \right) \frac{M(\xi)}{X}$$

$$\frac{1}{Y^2} \frac{d}{dt} M(\xi) \frac{c}{Y^2} = - \left(ct - \frac{cZ}{Y} \right) \frac{M(\xi)}{X}$$

Il faut encore vérifier, pour que la théorie soit cohérente, que les équations (1) entraînent réciproquement $\xi = \text{constante}$. En effet la combinaison de $(1)_a$ multipliée scalairement par V , avec $(1)_b$ multipliée par c nous donne $\frac{d}{dt} M(\xi) = 0$. Donc $\xi = \text{constante}$, car le cas où M est constant ne modifie pas les équations (1) est encore constant.

Nous appellerons $M(\xi)$ masse d'inertie d'une particule ; corrélativement nous définirons la force par les équations fondamentales ⁽¹⁾ :

$$(2) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{1}{Y^2} \frac{d}{dt} M(\xi) \frac{V}{Y} &= - \left(P - \frac{VZ}{Y} \right) \frac{M(\xi)}{X} + F \\ \frac{1}{Y^2} \frac{d}{dt} M(\xi) \frac{c}{Y} &= - \left(ct - \frac{cZ}{Y} \right) \frac{M(\xi)}{X} + F_t \end{aligned}}$$

B. — *Notion d'énergie.* — On peut former avec les équations (2) deux différentielles totales :

$$(3) \quad F \left(\frac{V}{Y^2} - \frac{PY^{\frac{1}{2}}}{Z} \right) - F_t \left(\frac{c}{Y^2} - \frac{ctY^{\frac{1}{2}}}{Z} \right) = c^2 \frac{M(\xi)}{\xi^{\frac{1}{2}}} \frac{d\xi^{\frac{1}{2}}}{Y^{\frac{1}{2}} dt}$$

$$(4) \quad F_t \cdot \frac{c}{Y^2} - F \cdot \frac{V}{Y^2} = \frac{1}{Y^2} \frac{d}{dt} M(\xi) c^2.$$

L'équation (3) se présente comme définition d'un travail élémentaire.

L'équation (4) est une équation de condition, dont nous verrons plus loin les conséquences.

La notion de potentiel est liée à celle d'énergie ; on peut la définir de plusieurs manières. Une définition quelconque du potentiel impose une équation différentielle à la fonction masse ; inversement, si l'on précise la masse, il lui correspondra une définition appropriée du potentiel, du type de Milne par exemple.

C. — *Le problème des deux corps.* — Une brève analyse de ce problème permettra ici de définir la masse. Tous les corps placés

⁽¹⁾ *Proc. of Roy. Soc.*, 1936, 154.

dans les mêmes conditions ont même accélération. Posons donc généralement, pour deux corps A et B.

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt_1} &= \gamma + \gamma_1; & \frac{dV_2}{dt_2} &= \gamma + \gamma_2; & \frac{d\gamma_1 - \frac{1}{2}}{dt_1} &= \frac{V}{c^2 Y^2} (\gamma + \gamma_1); \\ \frac{1}{Y^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{V}{Y^{\frac{1}{2}}} \right) &= \frac{\gamma + \gamma_1}{Y_1} + \frac{V}{c^2 Y_1^2} [V_1 (\gamma + \gamma_1)]. \end{aligned}$$

D'où l'équation du mouvement :

$$(5) \quad \frac{1}{Y_1^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{dt_1} \left(M_1(\xi) \frac{V}{Y_1^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{Y_1^{\frac{1}{2}}} M_1(\xi) \left[\frac{(\gamma + \gamma_1)}{Y_1} + \left(V_1 \frac{V(\gamma + \gamma_1)}{c Y_1} \right) \right] + \frac{V_1}{Y_1} \frac{d}{dt_1} M(\xi).$$

Le développement de cette équation est classique en relativité, et nous permet de définir, pour l'observateur, les masses « longitudinale » et « transversale » des corps A et B.

Séparons dans la dérivation de $M(\xi)$ le terme qui vient de γ , nous avons pour expression de l'action du corps B sur A :

$$(6) \quad F_1 = \frac{1}{Y_1^{\frac{1}{2}}} M(\xi_1) \left[\left(\frac{\gamma_1}{Y_1^{\frac{1}{2}}} \right) + \left(\frac{V_1(V_1 \gamma)}{c Y_1^{\frac{3}{2}}} \right) \right] - \frac{2 X_1^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} \frac{dM(\xi)}{d\xi}}{G(\xi)} (\gamma_1^2 + 2\gamma) \frac{V_1}{Y_1^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous supposons en effet que le terme dû au mouvement libre en l'absence d'interaction se trouve inclus dans les termes en γ .

Par hypothèse, les conditions initiales P_1, V_1, P_2, V_2 doivent être toujours considérées comme arbitraires; mais $X^{\frac{1}{2}}$ est le temps cosmique qui croît constamment, et qu'on doit assimiler aux petites distances à l'âge de l'univers. Par conséquent, si $\frac{dM(\xi)}{d\xi}$ n'est pas nul, la direction de F_1 finira par être nécessairement V_1 , c'est-à-dire indépendante de la position du corps B.

Une théorie construite sur cette base peut être cohérente, mais elle s'écarte absolument des conceptions classiques. On est donc conduit pour adapter la théorie aux lois physiques, à définir un « corps parfait » pour lequel la masse propre sera constante. Nous avons alors :

$$(6)' \quad \boxed{F_1 = \frac{1}{Y_1} m_1 \gamma_1 + \frac{1}{c^2 Y_1^2} m_1 V_1 (V_1 \cdot \gamma_1)}$$

Fait fondamental, la définition de F_1 est alors absolument indépendante formellement des éléments de B, de même que l'équation classique $F = m\gamma$. Il en résulte qu'on n'aura pas besoin dans l'étude du problème de l'interaction de deux corps (et ultérieurement de

corps), de définir une simultanéité, comme cela eût été nécessaire par exemple si l'on n'avait pas pris $m = \text{constante}$; une telle définition aurait exigé l'emploi non de la variable t , mais de l'invariant $X^{\frac{1}{2}}$ ⁽¹⁾.

D. — L'équation 3 donne dès lors :

$$(3)' \quad F\left(\frac{V}{Y^{\frac{1}{2}}} - \frac{PY^{\frac{1}{2}}}{Z}\right) - Ft\left(\frac{c}{Y^{\frac{1}{2}}} - \frac{ct + Y^{\frac{1}{2}}}{Z}\right) = \frac{1}{Y^{\frac{1}{2}}} \frac{d}{dt} (Mc^2 \text{Log } \xi^{\frac{1}{2}}).$$

Cette équation ayant la forme de la différentielle du travail, nous pouvons en un sens appeler énergie d'une particule la quantité :

$$E = mc^2 \text{Log } \xi^{\frac{1}{2}}.$$

On voit que $E = 0$ pour toutes les particules fondamentales. Or ce sont là des particules dont le mouvement n'est modifié par aucune action extérieure. Ce serait donc l'état stable d'énergie minimum d'après les idées classiques.

Mais le résultat vraiment important est donné par l'équation (4) qui devient :

$$(4)' \quad \boxed{F_t \frac{c}{Y^{\frac{1}{2}}} - F \frac{V}{Y^{\frac{1}{2}}} = 0}$$

La forme générale de F, F_t est donc :

$$k\left(\frac{E}{Y^{\frac{1}{2}}} + \frac{V \wedge H}{cY^{\frac{1}{2}}}; \frac{E \cdot V}{Y^{\frac{1}{2}}c}\right).$$

Par conséquent le système (E, H) constitue un sextivecteur formellement identique au champ électromagnétique. Ainsi la théorie conduit sans aucune hypothèse supplémentaire à identifier toutes les forces à des forces électromagnétiques. C'est-à-dire encore qu'il n'existe pas de champ de forces, mais uniquement des champs de tenseurs antisymétriques de second ordre de type électromagnétique.

Nous développerons au chapitre suivant les conséquences de cette propriété remarquable.

(1) Comme on le voit, nous nous séparons de M. Milne pour le choix de la fonction $M(\xi)$, non pour des contradictions de sa théorie, mais pour des raisons physiques. Il nous semble cependant que sa méthode, basée sur la

seule étude du mouvement libre, pour le choix de $M(\xi) = m\xi^{\frac{1}{2}}$, présente sur ce point particulier un défaut de principe. De plus $M(\xi)$ étant une masse propre, il n'y a pas lieu d'exiger qu'elle se réduise à $m/(1 - v^2/c^2)$ aux petites distances.

CHAPITRE V

Le problème des deux corps.

A. — Supposons à présent que les deux corps A et B soient assez rapprochés pour que leur interaction soit la seule force non négligeable; nous reprenons à peu près le calcul de Milne pour l'électromagnétisme⁽¹⁾; posons, pour la commodité: $k = \frac{Z_1 \mu}{Y_1^2 t_0}$; admettons, de plus, que le champ dérive d'un superpotentiel scalaire φ_{21} , de sorte que :

$$(H_1)_n = \frac{d^2 \varphi_{21}}{dy_1 dz_2} - \frac{c^2 \varphi_{21}}{dx_1 dy_2} (E_1) = \frac{1}{c} \frac{d^2 \varphi_{21}}{dx_1 dt_2} - \frac{d^2 \varphi_{21}}{dx_2 dt_1}.$$

L'équation fondamentale, pour le corps A soit :

$$(1) \quad \frac{1}{Y_1^2} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{m_1 V_1}{Y_1^2} \right) = - \frac{m_1}{X_1} \left(P_1 - \frac{V_1 Z_1}{y_1^2} \right) + \mu \frac{1}{t_0} \frac{Z_1}{y_1^2} \left(E_1 + \frac{V_1 \wedge H_1}{c} \right) \frac{1}{Y_1^2}$$

pour équation de l'énergie (IV, 3, 3') :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt_1} (E_1(\xi)) \\ & = \frac{\mu_1}{t_0} \left[\sum_{xyz} \frac{u_1 t_1 - x_1}{c} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x_2 \partial t_1} \right) - \sum_{xyz} \frac{y_1 u_1 - x_1 o_1}{c} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial y_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial y_2 \partial t_1} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Introduisons, pour abréger, les opérateurs :

$$L_{\alpha\beta} = t_\alpha \frac{d}{dt_\beta} + P_\alpha \frac{d}{dP_\beta} \quad (\alpha\beta = 1, 2).$$

Il vient :

$$(2)' \quad \frac{dE_1}{dt_1} + \frac{\mu_1}{ct_0} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + V_1 \frac{\partial}{\partial P_1} \right) (-L_{12} \varphi_{21}) = - \frac{\mu_1}{ct_0} \left(\frac{\partial}{\partial t_2} + V_1 \frac{\partial}{\partial P_2} \right) (\varphi_{21} + L_{11} \varphi_{21})$$

$$(2)'' \quad \frac{dE_2}{dt_2} + \frac{\mu_2}{ct_0} \left(\frac{\partial}{\partial t_2} + V_2 \frac{\partial}{\partial P_2} \right) (-L_{21} \varphi_{12}) = - \frac{\mu_2}{ct_0} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + V_2 \frac{\partial}{\partial P_1} \right) (\varphi_{12} + L_{22} \varphi_{12}).$$

La symétrie des premiers membres a conduit Milne à rechercher si les expressions $L_{12} \varphi_{21}$, $L_{21} \varphi_{12}$ pouvaient représenter le potentiel d'interaction. Dans le but de faire cette identification, — il s'agit, comme

(1) MILNE. *Proc. of Roy. Soc.*, 1938.

habituellement dans cette théorie, de la recherche du cas particulier favorable — nous poserons :

$$-\frac{\mu_1}{ct_0} L_{12}\varphi_{21} = \Phi_1; \quad -\frac{\mu_2}{ct_0} L_{21}\varphi_{12} = \Phi_2.$$

Il vient avec ces notations :

$$(3) \quad \frac{dt_1}{dt_1} + \frac{d\Phi_1}{dt_1} = V_1 \frac{d\Phi_1}{dV_1} - \frac{\mu_1}{ct_0} \left(\frac{d}{dt_2} + V_1 \frac{d}{dP_2} \right) (\varphi_{21} + L_{11}\varphi_{21})$$

et l'équation similaire pour B.

On voit, en se référant aux idées classiques, que Φ_1 et Φ_2 joueront le rôle de potentiels, si les conditions suivantes sont remplies :

$$(4) \quad \Phi_1 = \Phi_2$$

$$(5) \quad \varphi_{21} + L_{11}\varphi_{21} = 0$$

$$\varphi_{12} + L_{22}\varphi_{12} = 0.$$

Les conditions (5) supposent que la « déperdition d'énergie » s'annule avec les accélérations.

B. — *Etude de l'équation $L_{12} = 0$.* — Cette équation jouera un rôle important dans la résolution de l'équation (4).

La solution en est immédiate (équation linéaire aux dérivées partielles, dont les coefficients doivent être considérés comme constants) :

$$f = f(x_1y_2 - y_1x_2, y_1x_2 - x_1y_2, x_1x_2 - x_2x_1, \\ t_1x_2 - t_2x_1, t_1y_2 - t_2y_1, t_1x_2 - t_2x_2)$$

est donc une fonction des composants du tenseur antisymétrique formé à l'aide des quadrivecteurs (P_1, ct_1) , (P_2, ct_2) . L'invariant relativiste lié à ce 6-vecteur est l'expression :

$$(t_1P_2 - t_2P_1)^2 - \left(\frac{P_1 \wedge P_2}{c^2} \right)^2 = c^2(X_{12}^2 - X_1X_2);$$

en posant avec Milne :

$$X_{12} = t_1t_2 - \frac{P_1P_2}{c^2}.$$

Toute fonction de la forme $f(X_{12}^2 - X_1X_2)$ vérifie les deux équations $L_{12}f = 0$; $L_{21}f = 0$.

C. — Pour la résolution de l'équation (4), posons :

$$B_1 = \mu_1\varphi_{21}; \quad B_2 = \mu_2\varphi_{12};$$

soit à étudier :

$$L_{12}B_1 = L_{21}B_2.$$

Les différents invariants relativistes concernant les deux éléments de contact sont les variables des fonctions B_1 et B_2 ; c'est-à-dire :

$$X_1, X_2, u = X_{12}^2 - X_1 X_2; \quad Z_1/Y_1^{\frac{1}{2}}, Z_2/Y_2^{\frac{1}{2}}, Z_{12}/Y_2^{\frac{1}{2}}, Z_{21}/Y_1^{\frac{1}{2}}.$$

L'interprétation de tous ces invariants dans l'espace de Minkowski est immédiate, ce sont les différents produits scalaires des éléments des vecteurs (1) et (2). Nous avons :

$$(6) \quad \begin{cases} L_{12}B_1 = Z_{12} \frac{\partial B_1}{\partial Z_2} + Z_1 \frac{\partial B_1}{\partial Z_{21}} + X_{12} \frac{\partial B_1}{\partial X_2} \\ L_{21}B_2 = Z_{21} \frac{\partial B_2}{\partial Z_1} + Z_2 \frac{\partial B_2}{\partial Z_{12}} + X_{12} \frac{\partial B_2}{\partial X_1} \end{cases}$$

Les deux expressions (6) doivent être des fonctions symétriques des variables, donc dépendre uniquement de $u, v = Z, Z_2; w = Z_{12}Z_{21}, h = X_1X_2$. Nous laissons pour le moment de côté les facteurs $Y^{\frac{1}{2}}$ qui interviennent dans le calcul comme des constantes.

Il en résulte que B_1 et B_2 , tenu compte de la symétrie des formes ont nécessairement pour expressions :

$$(7) \quad \begin{cases} B_1 = X_2 f(u, v, w, h) + g(u, h, Z_1, Z_2, Z_{12}, Z_{21}) \\ B_2 = X_1 f(u, v, w, h) + g(u, h, Z_2, Z_1, Z_{21}, Z_{12}). \end{cases}$$

De plus, la fonction f comme on le voit, en tenant compte du (6), et en annulant g , satisfait à la condition $\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} = 0$, donc ne dépend de v et w que par le groupe $(v - w)$.

Étudions maintenant g en annulant f . La solution la plus simple des équations (6) est alors celle de Milne :

$$B_1 = Z_2 Z_{21}, \quad B_2 = Z_1 Z_{12}.$$

Posons par suite :

$$\begin{aligned} B_1 &= Z_2 Z_{21} \varphi(u, v, w, h, Z_1, Z_{12}) \\ B_2 &= Z_1 Z_{12} \varphi(u, v, w, h, Z_2, Z_{12}). \end{aligned}$$

On voit, d'après (6), que la différence $\varphi(u, v, w, h, Z_1, Z_{12}) - \varphi(u, v, w, h, Z_2, Z_{21})$ doit vérifier une équation aux dérivées partielles où Z_1, Z_{12}, Z_2, Z_{21} jouent le rôle de paramètres arbitraires. φ est donc indépendant de Z_1 et Z_{12} .

Tenons compte maintenant des conditions d'homogénéité (5), elles montrent :

a) que φ_{21} est homogène et de degré -1 par rapport à t_1, P_1 ;

b) que φ_{12} est homogène et de degré -1 par rapport à t_2, P_2 .

Donc $L_{12}, B_1 = L_{21}, B_2$ est homogène et de degré 0 par rapport à t_1, P_1 ; t_2, P_2 finalement B_1 est homogène et de degré $+1$ par rapport à t_2, P_2 , avec la condition symétrique pour B_2 . Par conséquent f

et φ sont homogènes et de degré (-1) les seuls groupes homogènes distincts sont u , h , $v - w$, $v + w$; posons pour les différents éléments de degré 0 :

$$\alpha = \frac{v - w}{\sqrt{u}} \quad \beta = \frac{h}{u} \quad \gamma = \frac{v + w}{\sqrt{u}}.$$

Les fonctions f et φ sont alors de la forme :

$$(8) \quad f \equiv \frac{1}{\sqrt{u}} f(\alpha, \beta) \quad \varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{u}} \varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

D'où les expressions des potentiels :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = -\frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{u}} [\epsilon(\alpha, \beta) X_{12} + \varphi(\alpha, \beta, \gamma)(v + w)] \\ \varphi_{21} = -\frac{\mu_2}{\sqrt{u}} [X_2 f(\alpha, \beta) + Z_2 Z_{21} \varphi(\alpha, \beta, \gamma)]. \end{array} \right.$$

La forme réduite ($\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \text{constante}$) du deuxième terme correspond bien entendu à la théorie électromagnétique de Milne. Mais il est curieux de remarquer que le premier terme correspond exactement, avec un sens différent il est vrai, à la formule symétrique donnée par Milne pour le potentiel de gravitation ⁽¹⁾. Nous analyserons séparément ces deux termes, et nous verrons dans quelles conditions ils permettent effectivement d'identifier gravitation et électromagnétisme.

D. — *La gravitation. Calcul et identification.* — Il faut calculer les composantes E et H du tenseur de gravitation; d'après les formules de définition, on s'appuie sur la formule donnée par Milne :

$$(10) \quad \left(\frac{\partial_2}{\partial x_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial t_1} \right) \frac{1}{\sqrt{u}} = 0.$$

Posons dès lors :

$$R = \frac{1}{\sqrt{u}} \quad S = X_2 f(\alpha, \beta).$$

Nous avons pour le calcul du champ la formule :

$$\frac{cE(x)}{\mu_2} = \left(\frac{\partial R}{\partial x_1} \frac{\partial S}{\partial t_2} - \frac{\partial R}{\partial t_1} \frac{\partial S}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \frac{\partial R}{\partial t_2} - \frac{\partial S}{\partial t_1} \frac{\partial R}{\partial x_2} \right) + R \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2 S}{\partial x_2 \partial t_1} \right)$$

et la formule analogue pour H, on calcule séparément les trois termes :

⁽¹⁾ *Proc. of Roy. Soc.*, 1937, 106. Il résulte du reste, de ce que sa définition du potentiel est arbitraire, que la solution correspondante du problème de la gravitation n'a qu'une valeur très relative et les définitions des deux potentiels de gravitation et d'électromagnétisme étant d'origines différentes, la synthèse qu'en déduit Milne est nécessairement très artificielle.

Calcul du champ (E. H.) de gravitation. $R = \frac{1}{\sqrt{u}} S = X_2 f(\alpha, \beta)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x_1} &= \frac{1}{c^2 u^{3/2}} [X_{12} x_2 - X_3 x_1]; \quad \frac{\partial S}{\partial t_2} = 2 t_2 f + X_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \left[\frac{Z_1 - Z_{12}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha}{u} [X_{12} t_1 - X_1 t_2] \right] + X_2 \frac{\partial f}{\partial \beta} \left[\frac{2 t_2 X_1}{u} - \frac{2 \beta}{u} (X_{12} t_1 - X_1 t_2) \right] \\ \frac{\partial R}{\partial t_1} &= -\frac{1}{u^{3/2}} [X_{12} t_2 - X_3 t_1]; \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = -\frac{2 x_2}{c^2} f + X_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \left[\frac{Z_{12} x_1' - Z_1 x_2'}{c^2 \sqrt{u}} + \frac{\alpha}{c^2 u} [X_{12} x_1 - X_1 x_2] \right] + X_2 \frac{\partial f}{\partial \beta} \left[-\frac{2 t_2 X_1}{c^2 u} + \frac{2 \beta}{c^2 u} (X_{12} x_1 - X_1 x_2) \right] \\ \left[\frac{\partial R}{\partial x_1} \frac{\partial S}{\partial t_2} - \frac{\partial R}{\partial t_1} \frac{\partial S}{\partial x_2} \right] &= \frac{2 X_2}{c^2 u^{3/2}} (t_1 x_2 - t_2 x_1) \left(f - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) + \frac{X_2^2}{c^2 u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} [(X_{12} x_2 - X_3 x_1)(Z_1 - Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' - Z_{12} x_1')] \\ \frac{\partial R}{\partial t_2} &= -\frac{1}{u^{3/2}} [X_{12} t_1 - X_1 t_2]; \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} = X_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \left[\frac{Z_{21} x_2' - Z_2 x_1'}{c^2 \sqrt{u}} + \frac{\alpha}{c^2 u} (X_{12} x_2 - X_3 x_1) \right] + X_2 \frac{\partial f}{\partial \beta} \left[-\frac{2 x_1 X_2}{c^2 u} + \frac{2 \beta}{c^2 u} (X_{12} x_2 - X_3 x_1) \right] \\ \frac{\partial R}{\partial x_1} &= \frac{1}{c^2 u^{3/2}} [X_{12} x_1 - X_1 x_2]; \quad \frac{\partial S}{\partial t_1} = X_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \left[\frac{Z_2 - Z_{21}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha}{u} (X_{12} t_2 - X_3 t_1) \right] + X_2 \frac{\partial f}{\partial \beta} \left[\frac{2 t_1 X_2}{u} - \frac{2 \beta}{u} [X_{12} t_2 - X_3 t_1] \right] \\ \left[\frac{\partial S}{\partial x_1} \frac{\partial R}{\partial t_2} - \frac{\partial S}{\partial t_1} \frac{\partial R}{\partial x_2} \right] &= -\frac{X_2^2}{c^2 u^{3/2}} \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} (t_1 x_2 - t_2 x_1) + \frac{X_2^2}{c^2 u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} [(X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 - Z_{21}) - X_{12} t_1 - X_1 t_2](Z_{21} x_2' - Z_2 x_1')] \end{aligned}$$

N. B.

$$\begin{aligned} X_1 &= t_1^2 - P_1^2/c^2; & X_2 &= t_2^2 - P_2^2/c^2; & X_{12} &= t_1 t_2 - P_1 P_2/c^2 \\ Z_1 &= t_1 - P_1/c^2; & Z_2 &= t_2 - P_2/c^2; & Z_{12} &= t_1 - P_1/c^2; & Z_{21} &= t_2 - P_2/c^2 \\ u &= X_{12}^2 - X_1 X_2 = \frac{(t_1 P_2 - t_2 P_1)^2}{c^2} - \frac{(P_1 \wedge P_2)^2}{c^4} \sim \frac{(P_2 - P_1)^2}{c^2} \cdot t^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R \left(\frac{\partial^3 S}{\partial x_1 \partial t_2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x_2 \partial t_1} \right) &= \frac{2t_2}{\sqrt{u}} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + \frac{2x_2}{c^2 \sqrt{u}} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} = \frac{X_2}{c^2 u^{3/2}} \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} (t_1 x_2 - t_2 x_1) + \frac{2}{c^2 u} \frac{\partial f}{\partial \alpha} [t_2 (Z_{21} x_2' - Z_2 x_1') - x_2 (Z_{21} - Z_2)] \\
&+ \frac{X_2}{\sqrt{u}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right] = - \frac{X_2}{c^2 u^{3/2}} \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} (t_1 x_2 - t_2 x_1) \\
&+ \frac{X_2}{c^2 u^2} \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 - Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' - Z_{12} x_1')] \\
&+ (X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 - Z_{21}) - (X_{12} t_1 - X_1 t_2)(Z_{21} x_2' - Z_2 x_1')] \\
&+ \frac{X_2}{\sqrt{u}} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial t_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right] = - \frac{2X_2}{c^2 u^{3/2}} \alpha \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} (t_1 x_2 - t_2 x_1) \\
&+ \frac{2}{c^2 u} \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} [t_2 (Z_{21} x_2' - Z_2 x_1') - x_2 (Z_{21} - Z_2)] + \frac{2X_2}{c^2 u^2} \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} [X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 - Z_{21}) - (X_{12} t_1 - X_1 t_2)(Z_{21} x_2' - Z_2 x_1')] \\
&+ \frac{X_2}{\sqrt{u}} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \left[\frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial t_2} - \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right] = + \frac{4X_2}{c^2 u^{3/2}} (\beta + \beta_2) \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} (t_1 x_2 - t_2 x_1) + \frac{2t_2}{\sqrt{u}} \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \frac{2x_2}{c^2 \sqrt{u}} \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t_1} = \frac{4X_2}{c^2 u^{3/2}} (1 + \beta) \frac{\partial f}{\partial \beta} (t_1 x_2 - t_2 x_1) \\
&+ \frac{X_2}{\sqrt{u}} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha} \left[\frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} - \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right] = \frac{2}{c^2 u} \frac{X_2}{X_1} \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} [t_1 (Z_1 x_2' - Z_{12} x_1') - x_1 (Z_1 - Z_{12})] \\
&+ \frac{2X_2}{c^2 u^2} \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 - Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' - Z_{12} x_1')] \\
&+ \frac{X_2}{\sqrt{u}} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2 \partial t_1} \right] = \frac{2X_2}{c^2 u} \frac{\partial f}{\partial \alpha} (x_2' - x_1') \\
&+ \frac{X_2}{c^2 u^2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 - Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' - Z_{12} x_1')] \\
&+ (X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 - Z_{21}) - (X_{12} t_1 - X_1 t_2)(Z_{21} x_2' - Z_2 x_1')] \\
&+ \frac{X_2}{\sqrt{u}} \frac{\partial f}{\partial \beta} \left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2 \partial t_1} \right] = \frac{2X_2}{c^2 u^{3/2}} \frac{\partial f}{\partial \beta} (2 + 3\beta)(t_1 x_2 - t_2 x_1) \\
&+ \frac{X_2}{c^2 u^2} \frac{\partial f}{\partial \beta} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 - Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' - Z_{12} x_1')] \\
&+ (X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 - Z_{21}) - (X_{12} t_1 - X_1 t_2)(Z_{21} x_2' - Z_2 x_1')]
\end{aligned}$$

D'où, en faisant la somme, l'expression complète de $\frac{cE}{\nu_2}$, que nous séparons pour la discussion en cinq groupes de termes :

$$(1) \quad \frac{2X_2}{c^2u^{3/2}}(t_1x_2 - t_2x_1)\left(f - \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha} - \frac{1}{2}\alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + (4 + 5\beta)\frac{\partial f}{\partial\beta} + 2(\beta + \beta^2)\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\right)$$

$$(2) \quad + \frac{2X_2}{cu^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2}\right)[(X_{12}x_2 - X_2x_1)(Z_1 - Z_{12}) - (X_{12}t_2 - X_2t_1)(Z_1x_2 - Z_{12}x_1)]$$

$$(3) \quad + \frac{2}{c^2u}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\right)[t_2(Z_{21}x_2' - Z_2x_1') - x_2(Z_{21} - Z_2)]$$

$$(4) \quad + \frac{2}{c^2u}\frac{X_2}{X_1}\beta\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}[t_1(Z_1x_2' - Z_{12}x_1') - x_1(Z_1 - Z_{12})]$$

$$(5) \quad + \frac{2}{c^2u}X_2\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x_2' - x_1').$$

L'expression correspondante de $\frac{c_0H_2}{\nu_2}$ s'écrit, de façon équivalente :

$$(1) \quad \frac{2X_2}{c^2u^{3/2}}(x_1y_2 - x_2y_1)\left(f^2 - \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha} - \frac{1}{2}\alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + (4 + 5f)\frac{\partial f}{\partial\beta} + 2(\beta + \beta^2)\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\right)$$

$$(2) \quad + \frac{2X_2}{c^2u^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2}\right)[(Z_1x_2' - Z_{12}x_1')(X_{12}y_2 - X_2y_1) - (Z_1y_2' - Z_{12}y_1')(X_{12}x_2 - X_2x_1)]$$

$$(3) \quad + \frac{2}{c^2u}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\right)[x_2(Z_{21}y_2' - Z_2y_1') - y_2(Z_{21}x_2' - Z_2x_1')]$$

$$(4) \quad + \frac{2}{c^2u}\frac{X_2}{X_1}\beta\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}[x_1(Z_1y_2' - Z_{12}y_1') - y_1(Z_1x_2' - Z_{12}x_1')]$$

$$(5) \quad + \frac{2}{c^2u}X_2\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x_1y_2' - x_2y_1').$$

Pour la discussion, nous supposerons, comme nous en avons le droit, que l'origine est l'un des deux corps ($P_1 = 0$; $V_1 = 0$) ; c'est d'ailleurs le cas usuel.

Dans l'expression de E, nous distinguerons d'abord deux ensembles de termes :

Le groupe (1), donnant une force dirigée (au second ordre près avec $t_1 \approx t_2$ grands) sur le vecteur ($P_2 = P_1$) ;

le groupe (3), (4), (5), donnant avec la même approximation une force collinéaire à ($V_2 = V_1$). L'expérience montre que ce dernier groupe est pratiquement négligeable ; les coefficients $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\beta \partial^2 f}{\partial x \partial \beta}$ sont donc au plus de l'ordre de f ; autrement dit, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\beta \partial^2 f}{\partial x \partial \beta}$ ne doivent pas être infiniment grands par rapport à f lorsque t croît indéfiniment.

Le groupe (2), négligeable dans le cas général, est même identiquement nul lorsque l'on prend : $P_1 = 0$; $V_1 = 0$.

Dans le champ H, nous obtenons les résultats suivants :

Pour (3) et (4), la valeur principale quand t croît indéfiniment, s'obtient en multipliant le terme correspondant de E par x ; dans l'expression définitive de la force d'interaction ($E + \frac{V \wedge H}{c}$), ces termes n'auront donc qu'une influence négligeable.

Les termes (1), (2), (5), sont identiquement nuls.

Il en résulte que le champ H doit être dans tous les cas considéré comme nul, et que le tenseur étudié se réduit à sa composante électrostatique, c'est-à-dire à une *force*, dirigée suivant le droite qui joint les deux corps. C'est donc un champ de gravitation.

Il faut encore remarquer que les termes dépendant de β doivent être simplement des termes correctifs. En effet, des divers groupes homogènes de variables que nous avons considérés, u_1 et $(v - w)$ font intervenir P_1 et P_2 comme variables principales (variations proportionnelles à celles de P_1 et P_2) ; h est du 4^e degré par rapport à l'ensemble t_1, t_2 du second degré par rapport à P_1, P_2 . Or t_1 et t_2 doivent être considérées sensiblement comme des constantes, P_1 et P_2 étant au contraire les éléments principaux, dont les conditions initiales sont arbitraires, comme dans tout problème de dynamique. Il en résulte que h ne doit apparaître que pour un phénomène de second ordre ; par suite nous supposerons la fonction f telle que $\beta \frac{\partial f}{\partial \beta}$, $\beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}$ soient des constantes, ou bien des fonctions tendant vers 0 pour $t_1, t_2 \rightarrow \infty$.

Avec ces conventions nous retrouvons la loi classique de l'inverse carré ; en effet, pour P_2 et P_1 voisins, nous avons sensiblement :

$$E \sim - \frac{2\mu_1 X_2 f}{c^2 a^2} (t_1 P_2 - t_2 P_1) \sim - \frac{f(P_2 - P_1)}{(P_2 - P_1)^3}$$

Pour le terme en $(V_2 - V_1)$, il n'est pas écarté par notre raisonnement, mais on ne peut pas dire non plus que l'expérience l'ait définitivement écarté ; il exprimerait une sorte de « correction de relativité ».

Bien entendu l'élément de choix que comporte la méthode de Milne intervient ici dans cette analyse ; mais il n'est pas sans intérêt de remarquer qu'un choix différent sur $f(\alpha, \beta)$ modifierait complètement la forme de E quelle que soit l'échelle de grandeur considérée. Or nous n'avons fait appel qu'à des résultats très généraux. On démontre enfin plus particulièrement que la loi de l'inverse carré étant établie par l'expérience pour un certain phénomène, il en est de même pour toutes les interactions semblables ; la notion de loi générale de forces ou d'interactions est donc une conséquence du principe d'équivalence.

Cependant les considérations que nous avons exposées au paragraphe précédent, si elles ne constituent pas absolument une démonstration rigoureuse des formules de Newton, nous fournissent une justification logique complémentaire de ces formules ; elles impliquent de plus la constance de f dans le temps, car β est proportionnel à t , α étant constant, et même nul dans toutes les applications pratiques $\left(\alpha \neq \frac{(t_2 P_1 - t_1 P_2)}{(t_2 P_1 - t_1 P_2)} \cdot \frac{V_2 - V_1}{c^2} \right)$. La valeur principale de f sera donc indépendante de β .

Dans ces conditions, nous retrouverons tous les résultats classiques de la gravitation ; le potentiel d'interaction étant 2Φ , d'après la formule, valable pour deux corps voisins (t, Nt_2) :

$$\frac{d}{dt_1} (E_1 + E_2 + 2\Phi) = V_1 \frac{\partial \Phi}{\partial V_1} + V_2 \frac{\partial \Phi}{\partial V_2}$$

Remarquons, en ce qui concerne Φ , la séparation du potentiel en deux parties égales, relatives à chacun des corps, qui sont dérivées par rapport aux temps propres de chacun d'eux, sans qu'il y ait eu jusqu'ici à définir une simultanéité (voir chap. IV).

Si, dans un problème, on doit établir une relation entre t_1 et t_2 , il est nécessaire que cette relation soit invariante et se réduise à $t_1 = t_2$ pour des corps voisins. Le plus simple de ces relations est $X_1 = X_2$; avec cette convention apparaît une sorte de principe d'égalité de l'action et de la réaction ($\mu_1 \varphi_{21} = \mu_2 \varphi_{12}$), valable d'ailleurs pour la gravitation seulement, qui se réduit au principe classique lorsque $t_1 \approx t_2$, mais qui joue en fait un rôle différent, de par son caractère conventionnel, qui n'implique aucune loi physique, sur une « propagation » de l'interaction par exemple. Nous étudierons d'ailleurs ce point ultérieurement.

Remarquons encore la relation $E^2 - H^2 = \frac{4\varphi_{21}^2}{c^4}$ (pour $f = \text{constante}$).

Explicitons maintenant les forces agissant sur A et B :

$$F = \frac{\mu_1}{t_0} \frac{Z_1}{Y^2} \left(E_1 + \frac{V_1 \wedge H_1}{c} \right) \frac{1}{Y^2} \neq f \frac{\mu_1 \mu_2 Z_1}{Y_1 t_0} \alpha$$

$$F_2 \neq f \frac{\mu_1 \mu_2 Z_2}{Y_2 t_0} \beta$$

On voit que l'on retrouve les formules classiques, en posant, à un coefficient constant près, que nous avons toujours le droit de faire rentrer dans f :

$\mu_1 = m_1$; $\mu_2 = m_2$ et cette identification est justifiée par l'ensemble des formules (champ, potentiel, force).

Dans les cas usuels $X_2 = t_2$; $Y_2 = 1$; d'où : $F = \frac{f t}{t_0} m_1 m_2 \frac{1}{r^2}$, expression que nous pourrions identifier à celle de la gravitation universelle en posant $\gamma = -\frac{f t}{t_0}$. Ainsi f doit être considérée comme une constante universelle négative.

Nous retrouvons ici dans le cas général un résultat déjà donné par Milne à propos d'une étude sur le cas où l'une des deux particules est fondamentale ; est proportionnel au temps (1). Nous verrons l'interprétation remarquable que Milne a donnée de ce résultat (l'effet K galactique).

E. — *L'électromagnétisme*. — On trouvera sur les deux pages de calculs ci-jointes :

1) Le développement de la formule de définition, comme l'a fait Milne (1) dans le cas où $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ est une constante. Nous n'y avons pas écrit les termes en $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \alpha}$ déjà calculés de façon identique dans le cas de la gravitation.

2) Les expressions complètes des champs E et H, groupés de la même manière que dans la gravitation, et que nous allons étudier.

Le terme (4), qui correspond au terme (2) de la gravitation, s'annule dans les mêmes conditions lorsque l'on fait : $P_1 = 0$; $V_1 = 0$. Il en est de même de (10) qui correspond à (5) de la gravitation ; les termes (5), (6), (7), (8), (9), correspondent à (3) et (4) de la gravitation, et sont négligeables dans le champ magnétique, inconnus expérimentalement dans le champ électrostatique.

Les groupes (1), (2), (3), dans le champ électrostatique, donnent un terme dont la valeur principale est $\frac{K}{c^2 u^2} (x_2 - x_1)$; le terme (2) se

ramène en effet à ce cas si l'on remarque que $\frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{u}} \sim \frac{v}{2}$.

Si l'on prend par exemple pour φ une somme de monômes en $\alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu$, λ, μ, ν , étant des puissances quelconques, on voit que tous les termes non infiniment petits du coefficient de $(x_2 - x_1)$ seront avec φ dans un rapport constant, lorsque t tend vers l'infini.

CALCUL du tenseur (E. H.) électromagnétique.

$$R = \frac{1}{\sqrt{u}}; S = Z_2 Z_{21} \varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

$$\alpha = \frac{v-w}{\sqrt{u}}; \beta = \frac{h}{u}; \gamma = \frac{v+w}{\sqrt{u}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x_1} &= \frac{1}{c^3 u^{3/2}} [X_{12} x_2 - X_2 x_1]; \frac{\partial S}{\partial t_2} = (Z_2 + Z_{21}) \varphi + Z_2 Z_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[\frac{Z_1 - Z_{12}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha}{u} (X_{12} t_1 - X_1 t_2) \right] \\ &\quad + Z_2 Z_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \left[\frac{Z_1 + Z_{12}}{\sqrt{u}} - \frac{\gamma}{u} (X_{12} t_1 - X_1 t_2) \right] + Z_2 Z_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \left[\frac{2 t_2 X_1}{u} - \frac{2 \beta}{u} (X_{12} t_1 - X_1 t_2) \right] \\ \frac{\partial R}{\partial t_1} &= -\frac{1}{u^{3/2}} [X_{12} t_2 - X_2 t_1]; \frac{\partial S}{\partial x_2} = -(Z_{21} x_2' + Z_2 x_1') \frac{\varphi}{c^2} + Z_2 Z_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[\frac{Z_{12} x_1' - Z_1 x_2'}{c^2 \sqrt{u}} + \frac{\alpha}{c^2 u} (X_{12} x_2 - X_1 x_2') \right] \\ &\quad + Z_2 Z_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \left[\frac{\gamma}{c^2 u} (X_{12} x_1 - X_1 x_2) - \frac{Z_{12} x_2' + Z_1 x_2'}{c^2 \sqrt{u}} \right] + Z_2 Z_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \left[-\frac{2 t_2 X_1}{c^2 u} + \frac{2 \beta}{c^2 u} (X_{21} x_1 - X_1 x_2') \right] \\ \left[\frac{\partial R}{\partial x_1} \frac{\partial S}{\partial t_2} - \frac{\partial R}{\partial t_1} \frac{\partial S}{\partial x_2} \right] &= \frac{\varphi}{c^3 u^{3/2}} [X_{12} t_2 - X_2 t_1 - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_{21} x_2' + Z_2 x_1')] - \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u^{3/2}} (t_1 x_2 - t_2 x_1) \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right) \\ &\quad + \frac{Z_2 Z_{31}}{c^3 u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 + Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' + Z_{12} x_1')] \\ &\quad + \frac{Z_2 Z_{31}}{c^3 u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 - Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' - Z_{12} x_1')] \\ &\quad + \frac{Z_2 Z_{31}}{c^3 u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} [(X_1 t_2 - X_{12} t_1)(Z_2 x_1' + Z_{21} x_2')] - \frac{Z_2 Z_{21}}{c^3 u^{3/2}} (t_1 x_2 - t_2 x_1) \left(\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \rho}{\partial \gamma} \right) \\ \left[\frac{\partial S}{\partial x_1} \frac{\partial R}{\partial t_2} - \frac{\partial S}{\partial t_1} \frac{\partial R}{\partial x_2} \right] &= \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} [(X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 + Z_{21}) - (X_1 t_2 - X_{12} t_1)(Z_2 x_1' + Z_{21} x_2')] \\ &\quad + \frac{Z_2 Z_{31}}{c^3 u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} [(X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 - Z_{21}) - (X_1 t_2 - X_{12} t_1)(Z_2 x_1' - Z_{21} x_2')] \\ R \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2 S}{\partial x_2 \partial t_1} \right] &= \frac{Z_2 + Z_{21}}{\sqrt{u}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{Z_2 x_1' + Z_{21} x_2'}{c^2 u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \\ &\quad + \frac{1}{c^2 u^{3/2}} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_2 + Z_{21}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_{21} x_1' + Z_{21} x_2')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Z_2 + Z_{21}}{\sqrt{u}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \frac{Z_2 x_1' + Z_{21} x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}}{c^2 \sqrt{u}} = \frac{2}{c^2 u^3} \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_2 + Z_{21}) - (X_{12} t_2 + X_2 t_1)(Z_2 x_1' + Z_{21} x_2')] \\
& \quad + \frac{2 X_2}{c^2 u^{3/2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} [t_1 (Z_2 x_1' + Z_{21} x_2') - x_1 (Z_2 + Z_{21})] \\
& + \frac{Z_2 + Z_{21}}{\sqrt{u}} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + \frac{Z_2 x_1' + Z_{21} x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}}{c^2 \sqrt{u}} = \frac{1}{c^2 u^{3/2}} \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} [(Z_2 + Z_{21})(X_{12} x_2 - X_2 x_1) - (Z_2 x_1' + Z_{21} x_2)(X_{12} t_2 - X_2 t_1)] \\
& + \frac{Z_2 Z_{21}}{\sqrt{u}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial t_2} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \right] = \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u} \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} (x_2' - x_1') + \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u^2} \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 + Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' + Z_{12} x_1)] \\
& \quad - \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u^{3/2}} \alpha \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} (t_1 x_2 - t_2 x_1) + \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u^2} \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} [(X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 - Z_{21}) - (X_{12} t_1 - X_1 t_2)(Z_2 x_1' - Z_2 x_2')] \\
& + \frac{Z_2 Z_{21}}{\sqrt{u}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial t_2} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial t_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right] = \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u} \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} (x_2' - x_1') + \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u^2} \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} [(X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 + Z_{21}) - (X_1 t_2 - X_{12} t_1)(Z_2 x_1' - Z_{21} x_2)] \\
& \quad - \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u^{3/2}} \alpha \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} (t_1 x_2 - t_2 x_1) + \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u^2} \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 - Z_{12}) - (X_{12} t_1 - X_1 t_2)(Z_1 x_2' - Z_{12} x_1)] \\
& + \frac{Z_2 Z_{21}}{\sqrt{u}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial t_2} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial t_1} \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \right] = - \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u^3} \gamma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} (t_1 x_2 - t_2 x_1) - \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u} \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} (x_2' - x_1') \\
& \quad + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} \frac{Z_2 Z_{21}}{c^2 u^2} \left[\frac{(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 + Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' + Z_{12} x_1)}{c^2 u^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 + Z_{21}) - (X_1 t_2 - X_{12} t_1)(Z_2 x_1' + Z_{21} x_2)}{c^2 u^2} \right] \\
& + \frac{Z_2 Z_{21}}{\sqrt{u}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial t_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial t_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right] = - \frac{2 Z_2 Z_{21}}{c^2 u^3} \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} [(X_{12} x_1 - X_1 x_2)(Z_2 + Z_{21}) - (X_{12} t_1 - X_1 t_2)(Z_2 x_1' + Z_{21} x_2)] \\
& \quad - \frac{2 Z_2 Z_{21}}{c^2 u^2} X_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} [t_2 (Z_2 x_1' + Z_{21} x_2') - x_2 (Z_2 + Z_{21})] \\
& + \frac{Z_2 Z_{21}}{\sqrt{u}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} \left[\frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} - \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \right] = \frac{2 Z_2 Z_{21}}{c^2 u^2} \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} [(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 + Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' + Z_{12} x_1)] \\
& \quad + \frac{2 Z_2 Z_{21}}{c^2 u^2} X_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} [t_1 (Z_1 x_2' + Z_{12} x_1') - x_1 (Z_1 + Z_{12})] \\
& + \frac{Z_2 Z_{21}}{\sqrt{u}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1 \partial t_2} \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2 \partial t_1} \right] = \frac{1}{c^2 u^2} Z_2 Z_{21} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} \left[\frac{(X_{12} x_2 - X_2 x_1)(Z_1 + Z_{12}) - (X_{12} t_2 - X_2 t_1)(Z_1 x_2' + Z_{12} x_1)}{c^2 u^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(X_1 x_2 - X_{12} x_1)(Z_2 + Z_{21}) - (X_1 t_2 - X_{12} t_1)(Z_2 x_1' + Z_{21} x_2)}{c^2 u^2} \right]
\end{aligned}$$

Expression du champ (E. H.) électromagnétique.

E) Les différents termes se partagent de manière semblable à ceux de la gravitation, mais en dix groupes :

- (1)
$$[(X_{12}x_2 - X_2x_1)(Z_2 + Z_{21}) - (X_{12}t_2 - X_2t_1)(Z_{21}x_2' + Z_2x_1')] \frac{1}{c^2u^{3/2}} \left[\varphi + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right]$$
- (2)
$$\left[\begin{aligned} & (X_{12}x_2 - X_2x_1)(Z_1 + Z_{12}) - (X_{12}t_2 - X_2t_1)(Z_1x_2' + Z_{12}x_1') \\ & + (X_1x_2 - X_2x_1)(Z_2 + Z_{21}) - (X_1t_2 - X_2t_1)(Z_2x_1' + Z_{21}x_2') \end{aligned} \right] \frac{Z_2Z_{21}}{c^2u^2} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} + 2\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} \right]$$
- (3)
$$- 2(t_1x_2 - t_2x_1) \frac{Z_2Z_{21}}{c^2u^{3/2}} \left[\left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right) + \frac{1}{2} \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} \right) - 2(\beta + \beta\gamma) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} (2 + 3\beta) \right]$$
- (4)
$$\left[\begin{aligned} & (X_{12}x_2 - X_2x_1)(Z_1 - Z_{12}) - (X_{12}t_2 - X_2t_1)(Z_1x_2' - Z_{12}x_1') \\ & + (X_1x_2 - X_{12}x_1)(Z_2 - Z_{21}) - (X_1t_2 - X_{12}t_1)(Z_2x_1' - Z_{21}x_2') \end{aligned} \right] \frac{Z_2Z_{21}}{c^2u^2} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right]$$
- (5)
$$[t_2(Z_{21}x_2' - Z_2x_1') - x_2(Z_{21} - Z_2)] \frac{2Z_2Z_{21}X_1}{c^2u^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}$$
- (6)
$$[t_1(Z_1x_2' - Z_{12}x_1') - x_1(Z_1 - Z_{12})] \frac{2Z_2Z_{21}X_2}{c^2u^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}$$
- (7)
$$[(Z_2 + Z_{21})x_2 - (Z_2x_1' + Z_{21}x_2')t_2] \frac{2Z_2Z_{21}X_1}{c^2u^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma \partial \beta}$$
- (8)
$$[(Z_1x_2' + Z_{12}x_1')t_1 - x_1(Z_1 + Z_{12})] \frac{2Z_2Z_{21}X_2}{c^2u^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma \partial \beta}$$
- (9)
$$[(Z_2x_1' + Z_{21}x_2')t_1 - x_1(Z_2 + Z_{21})] \frac{2X_2}{c^2u^{3/2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$$
- (10)
$$[(x_2' - x_1')] \frac{Z_2Z_{21}}{c^2u} \left[-\gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} \right]$$

H)

- $$\begin{aligned}
(1) \quad & [(Z_{21}x'_2 + Z_2x'_1)(X_{12}y_2 - X_2y_1) - (X_{12}x_2 - X_2x_1)(Z_2y_1 + Z_{21}y_2)] \frac{1}{c^2u^3/2} \left[\varphi + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right] \\
(2) \quad & \left[(X_{12}x_2 - X_2x_1)(Z_1y'_2 + Z_{12}y'_1) - (x_{12}y_2 - X_2y_1)(Z_1x'_2 + Z_{12}x'_1) \right] \frac{Z_2Z_{21}}{c^2u^3} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} + 2\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} \right] \\
(3) \quad & [-2(x_1y_2 - x_2y_1)] \frac{Z_2Z_{21}}{c^2u^3/2} \left[\left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right) + \frac{1}{2} \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \gamma} \right) - 2(\beta + \beta^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} (2 + 3\beta) \right] \\
(4) \quad & \left[(X_{12}x_2 - X_2x_1)(Z_1y'_2 - Z_{12}y'_1) - (X_{12}y_2 - X_2y_1)(Z_1x'_2 - Z_{12}x'_1) \right] \frac{Z_2Z_{21}}{c^2u^3} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \\
(5) \quad & [x_2(Z_{21}y'_2 - Z_2y'_1) - y_2(Z_{21}x'_2 - Z_2x'_1)] \frac{2Z_2Z_{21}X_1}{c^2u^3} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial \beta} \\
(6) \quad & [x_1(Z_1y'_2 - Z_{12}y'_1) - y_1(Z_1x'_2 - Z_{12}x'_1)] \frac{2Z_2Z_{21}X_2}{c^2u^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} \\
(7) \quad & [y_2(Z_2x'_1 - Z_{21}x'_2) - x_2(Z_2y'_1 + Z_{21}y'_2)] \frac{2Z_2Z_{21}X_1}{c^2u^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma \partial \beta} \\
(8) \quad & [x_1(Z_1y'_2 + Z_{12}y'_1) - y_1(Z_1x'_2 + Z_{12}x'_1)] \frac{2Z_2Z_{21}X_2}{c^2u^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma \partial \beta} \\
(9) \quad & [x_1(Z_2y'_1 + Z_{21}y'_2) - y_1(Z_2x'_1 + Z_{21}x'_1)] \frac{2X_2}{c^2u^{3/2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \\
(10) \quad & (x'_2 - x'_1) \frac{Z_2Z_{21}}{c^2u} \left[-\gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} \right]
\end{aligned}$$

Valeurs principales :

$$-\frac{cE}{\mu_2} \# 2\varphi \mid P_2 - P_1 \mid^2 ; \quad -\frac{c^H}{\mu_2} \# \varphi(V_2 + V_1) \wedge \mid P_2 - P_1 \mid^2$$

Le fait fondamental, qui tient à ce que le temps ne disparaît pas dans une dérivation de $Z_2 Z_1$, $Z_{21} Z_{12}$, $Z_2 Z_{21}$, par rapport aux x au lieu des t , est que les termes (1) et (2) de H sont du même ordre en x et en t que les termes correspondants de E ; (3) s'annule, ce dont nous verrons plus loin les conséquences. La discussion étant alors semblable à celle qui a déjà été faite pour le terme principal de la gravitation, on voit que la forme des premiers termes de E et H correspond à celles des champs électrique et magnétique en théorie classique, les coefficients étant non égaux, mais dans un rapport constant, et égal à 2. Prenons alors pour expression de base celle donnant le champ électrique, on voit qu'il est impossible de ramener l'expression de H à celle de Biot et Savart; c'est-à-dire encore que la formule de Biot et Savart est incompatible avec l'existence des superpotentiels scalaires φ_{12} et φ_{21} , dont dérivent, suivant la méthode de Milne H , E , ainsi, comme nous le verrons ultérieurement, que les formules de Maxwell.

L'objection qui se présente alors à l'esprit est soulevée par l'expérience de Rowlands; cette expérience, d'après Milne, doit nous conduire simplement à attribuer une valeur double au nombre de charges équivalentes à un courant, et il ne pourra se produire de différence que lorsqu'on examinera le mouvement d'une charge isolée dans le champ d'un disque de Rowlands; mais cette expérience n'est pas encore matériellement accessible. Il nous paraît donc légitime d'identifier les expressions trouvées à celles du champ électromagnétique. Et la méthode suivie, non pour faire rentrer les phénomènes connus dans un cadre inconnu *a priori*, mais pour les découvrir à partir d'un principe général nous montre que, si les conventions posées correspondent effectivement à une loi de la nature (existence des superpotentiels), on ne doit pas trouver d'autre propriété générale de la matière que celles impliquées par le tenseur de gravitation et le tenseur électromagnétique.

Indiquons de plus avec Milne que les formules du champ électromagnétique, appliquées aux seules expériences faites jusqu'à présent, où les charges aient pu être considérées comme isolées, c'est-à-dire le mouvement d'un électron dans le champ du noyau, expliquent sans hypothèse supplémentaire les résultats d'Uhlenbeck et Goudsmit sur les doublets, et le sens de la théorie primitive du spin.

Unités électromagnétiques. — On obtiendra la force d'interaction en multipliant E et H par le coefficient $k_1 = \frac{Z_1 \mu_1}{Y^2 t_0}$; de même pour $E_2 H_2$.

On voit en particulier que c'est le coefficient $\varphi(\alpha\beta\gamma)$ qui détermine l'interaction électromagnétique, et non μ_1 et μ_2 qui, à une constante près, sont à identifier aux masses; et il n'y a pas lieu de séparer des charges e_1 , e_2 , dont on ferait ensuite le produit. Il serait d'ailleurs illogique de le faire, tant qu'une étude du problème des n corps

n'aura pas été envisagée ; en électricité classique, on ne définit d'ailleurs la charge que relativement à une charge témoin, par l'interaction d'une charge avec cette charge témoin ; il n'en est pas de même pour la masse de gravitation, qu'on identifie à une masse d'inertie définie au préalable par le mouvement d'un seul corps.

Remarque. — La théorie de la gravitation et de l'électromagnétisme donnée ci-dessus prévoit des interactions entre 2 corps ponctuels déterminés uniquement par leurs masses ; l'expérience montre que la constante de gravitation est la même pour tous les corps, donc que f est une constante universelle. D'après la forme de nos équations, on doit admettre que, parallèlement φ est une constante universelle, tout au moins en valeur absolue. C'est-à-dire en un sens qu'on peut prévoir la constance du rapport $\frac{e}{m}$ pour des particules élémentaires, φ pouvant être, à l'inverse de f , positif ou négatif (fait d'expérience), des corps de masses élevées non ponctuels pouvant être neutres.

Note sur le problème des n corps. — Le raisonnement sur la définition de la force agissant sur un corps, comme élément d'interaction, reste valable dans le cas de n corps en présence. Si nous admettons, et c'est là un postulat justifié simplement par la mécanique classique, que l'action de deux corps P et Q sur un corps A s'obtient en ajoutant les actions qu'ils auraient sur A, considérés isolément, nous admettons à la fois,

- la composition vectorielle des forces,
- l'additivité des potentiels.

C'est de ces postulats que résulte :

1° L'existence d'un système de nombres proportionnels m caractérisant les masses ;

2° Le potentiel électromagnétique s'ajoutant scalairement au potentiel de gravitation, l'existence d'un deuxième système de nombres proportionnels e caractérisant les charges électriques.

En particulier, nous pouvons alors parler de proportionnalité de la masse gravitationnelle à la masse d'inertie dans le cas le plus général. La démonstration de la propriété pour deux corps n'entraînait pas en effet l'existence d'un système de nombres proportionnels pour n corps.

Si l'on utilise ce postulat, où on peut, d'après Milne⁽¹⁾, développer une théorie analogue à celle de Maxwell.

(1) *Proc. of Roy. Soc.*, 1938.

De la définition du champ :

$$(20) \quad \begin{aligned} (E_1)_n &= \sum_{s=2}^n \frac{1}{c} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{s1}}{\partial x_1 \partial t^s} - \frac{\partial^2 \varphi_{s1}}{\partial x_s \partial t_1} \right) \\ (H_1)_n &= \sum_{s=2}^n \left(\frac{\partial^2 \varphi_{s1}}{\partial y_1 \partial x_s} - \frac{\partial^2 \varphi_{s1}}{\partial x_1 \partial y_s} \right) \end{aligned}$$

Il résulte d'abord :

$$(21) \quad \begin{cases} \operatorname{div} (H_1) = 0 \\ \operatorname{Rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \end{cases}$$

D'autre part, si l'on pose :

$$\sum_r^1 \square_1 \square_s \varphi_{s1} = a_1,$$

$$\text{avec :} \quad \square_1 \square_s = \nabla_1 \nabla_s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_s}$$

On obtient :

$$(22) \quad \begin{cases} \operatorname{div} E_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial a_1}{\partial t_1} \\ \operatorname{rot} H_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{\partial a_1}{\partial n_1} \end{cases}$$

Ces équations résultent simplement de l'hypothèse d'un superpotentiel.

De même les équations de propagation du champ :

$$(23) \quad \begin{cases} \square^2 H = 0 \\ \square^2 E = 0 \end{cases}$$

Ces équations dans lesquelles il n'y a pas lieu de distinguer gravitation et électromagnétisme, donnent de ces deux types d'interaction la synthèse la plus naturelle. L'origine en est, rappelons-le, l'identité *a priori* de toute « action à distance » avec celle d'un champ tensoriel de type électromagnétique.

Elles sont invariantes dans toute transformation de Lorentz, qui fait passer, rappelons-le, d'un observateur fondamental à un autre observateur fondamental. La méthode suivie donne de plus la loi de transformation lorsqu'on passe d'un observateur à un autre observateur quelconque.

QUELQUES RÉSULTATS PRATIQUES

A. — Pour deux corps neutres électriquement, nous avons vu que l'interaction se réduisait sensiblement à $\gamma m_1 m_2 \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} 3$, γ étant proportionnel au temps.

Si nous effectuons avec Milne ⁽¹⁾ la transformation $\frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\tau_0}$; et par suite, au second ordre près $r = \frac{t p}{t_0}$.

$$(1) \quad \Phi = \gamma_0 m_1 m_2 \frac{\pi_1 - \pi_2}{|\pi_1 - \pi_2|^3};$$

Dans cette échelle, les interactions suivent la loi de Newton; donc les trajectoires relatives sont des coniques, ou approximativement des cercles; il en résulte que dans l'échelle du temps (t) les trajectoires sont des spirales logarithmiques.

Dans une série de développements très remarquables, Milne a montré que les lois de la dynamique se retrouvent avec une grande approximation, pourvu qu'on emploie le temps t défini par $t = t_0 \log \frac{t}{t_0} + t_0$; il est ainsi conduit à distinguer un « temps cinématique », qui permet la représentation simple des phénomènes radioactifs par exemple, ou intergalactiques, et le temps dynamique, qui donne une période constante de notre pendule, ainsi que des principaux phénomènes de la mécanique céleste.

Et Milne explique ainsi l'existence des nébuleuses spirales :

Admettons comme vraisemblable l'hypothèse que tout un faisceau d'étoiles décrivent la même trajectoire : les mesures que nous ferons en suivant une étoile dans son mouvement (échelle dynamique), nous donneront un cercle; lorsqu'on photographie d'un seul coup tout un faisceau d'étoiles dans des positions différentes d'une même trajectoire, on obtient une spirale logarithmique.

B. — *Champ magnétique des corps neutres.* — Nous avons vu que le terme (3), du même ordre dans E que (2), et lui aussi constant par rapport à (1), bien qu'on doive le supposer petit à cause de la loi de Biot et Savart (ou celle qui la remplace), s'annule dans H. Il en résulte que si on annule la somme des coefficients de $(x_2 - x_1)$ dans E, il existera dans H un terme du même ordre, c'est-à-dire constant dans les mêmes conditions que φ et que f dans la gravitation; ce terme ne sera pas négligeable, pourvu que les vitesses relatives et les masses en présence soient assez grandes.

(1) *Proc. of Roy. Soc.*, 1937, 160.

Ce fait explique très simplement le champ magnétique des corps neutres, et l'on retrouve par là-même la forme de l'équation en $\frac{P \wedge V}{|P|^3}$ qui est celle que donne P. M. S. Blackett dans son rapport au Congrès Solvay (novembre 1948). Elle est admise comme formule élémentaire, sans qu'aucune théorie satisfaisante puisse être donnée de son origine. L'auteur cherche ensuite à relier des phénomènes extrêmement divers :

- variation du champ terrestre dans le temps,
- variation en profondeur,
- variation avec les types spectraux des étoiles,

et les explique en général par des considérations locales (lorsqu'une telle explication peu être trouvée). Il s'agit de toutes façons de phénomènes encore peu connus expérimentalement, et nous pensons simplement apporter une solution au problème fondamental que pose Blackett, de l'origine inconnue des champs magnétiques des corps célestes tournants, considérés comme à peu près neutres.

Pour préciser ce dernier point, il faut remarquer que si l'on calcule le champ électrique qui correspondrait, en théorie classique, au champ magnétique terrestre en le supposant pour simplifier le produit par une charge électrique placée au centre de la terre, nous trouvons :

$E \text{ (u.e.s.)} = \frac{c^2 H \text{ u.e.m.}}{v}$, soit avec H 0,5 gauss, de l'ordre de 10^4 u.e.s., ou encore 10^{10} volt/mètre.

On comprend qu'un tel champ ne peut subsister dans les conditions courantes, et qu'il se décharge à travers n'importe quel diélectrique, d'où l'apparition du champ magnétique. La théorie prévoit inversement qu'avec un champ électrique convenable la sphère électrisée qui le produirait ne donnerait aucun champ magnétique pour une certaine vitesse de rotation. Mais de même que Swam n'a pas réussi à mettre en évidence le champ magnétique d'une boule tournante, ce champ électrique est inaccessible à l'expérimentation actuelle. Le champ magnétique des corps neutres n'apparaît que pour des masses considérables.

Conclusion.

Partis d'hypothèses générales, nous avons fait l'analyse complète des interactions possibles entre deux corps. Nous avons identifié, par un procédé unique, l'ensemble des phénomènes macroscopiques connus, y compris le champ des corps tournants. Il n'en existe donc pas d'autres, qu'on puisse jamais ranger dans une autre catégorie que celles identifiées de la gravitation et de l'électromagnétisme. C'est là une nouvelle justification théorique d'un fait expérimental connu et indiscuté.

Cet ensemble de résultats, que seule jusqu'à présent la théorie de Milne permet d'interpréter, nous donne une confirmation remarquable de ses idées originales ⁽¹⁾.

(¹) Milne a résumé l'ensemble des articles parus dans *Proc. of the Roy. Soc.*, que nous avons cités, dans *Kinematical Relativity* (Oxford, 1948).

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

La logique intuitionniste.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 29 avril 1949.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,
A. CHATELET.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,
JEAN SARRAILH.

